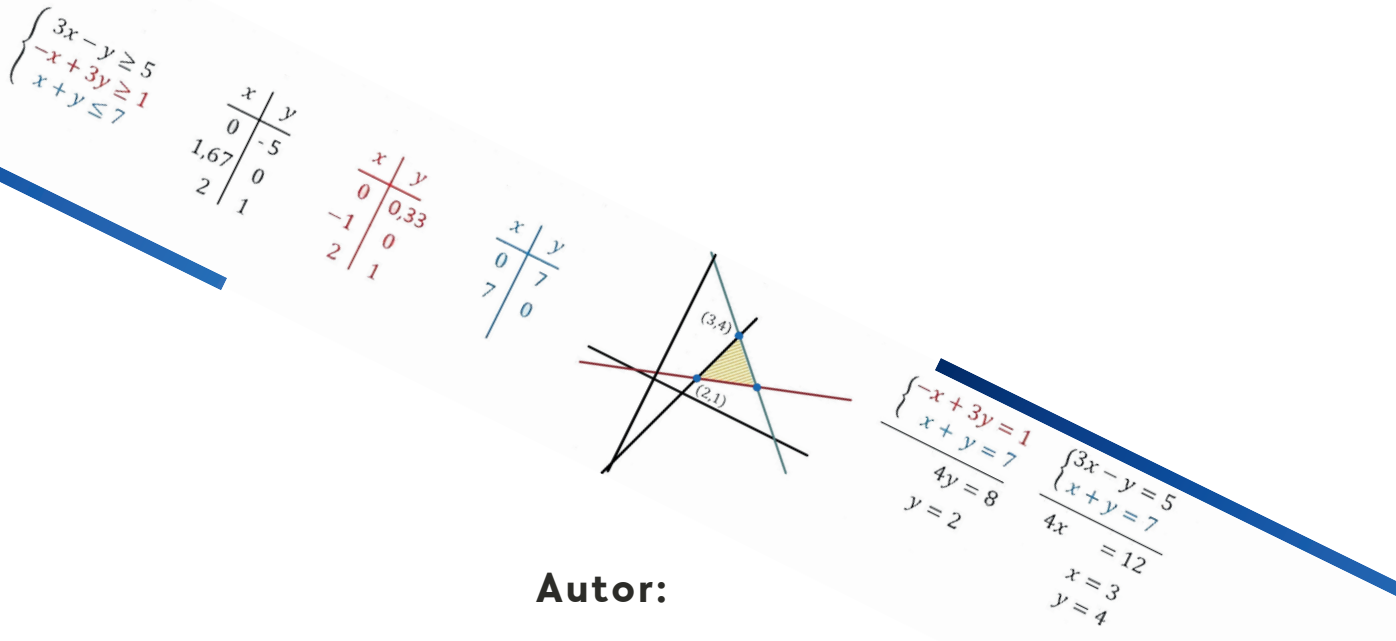
INSTITUTO SUPERIOR TECNOLÓGICO UNIVERSITARIO CORPORATIVO
EDWARDS DEMING®
saber qué hacer y cómo hacerlo

ANÁLISIS FUNCIONAL Y **ECUACIONES E INECUACIONES 2X2**



Autor:

José Luis Hidalgo Torres

Deming
EDITORIAL TECNOLÓGICA

AÑO 2024

José Luis Hidalgo Torres

Análisis funcional y ecuaciones e inecuaciones 2x2

Prólogo escrito por el PhD. Johnny Chavarría

Editorial Deming

Análisis funcional y ecuaciones e inecuaciones 2x2
Autor: José Luis Hidalgo Torres

Editorial Deming
Dirección: Calle Edmundo Chiriboga OE-3H y Jorge Páez, Quito, Ecuador

Primera edición – Año 2024

ISBN: 978-9942-692-14-6

Impreso por: GraficArte

Asesoría y colaboración: didáctica editorial

© Este libro es de uso científico, académico e investigativo. Prohibida su comercialización.

Para más información, escribir al correo:
editorial@deming.edu.ec

El análisis funcional y las ecuaciones e inecuaciones son componentes cruciales en el estudio de las matemáticas, con aplicaciones significativas en diversos campos científicos y de ingeniería. Este libro ofrece una exploración técnica y profunda de los conceptos esenciales, comenzando con la lógica matemática y la teoría de conjuntos, que forman la base del análisis matemático. A lo largo de sus capítulos, se abordan en detalle los números reales, sus propiedades y operaciones, así como el análisis de funciones logarítmicas y exponenciales. Además, se trabajan las inecuaciones 2x2, junto con sus métodos efectivos de resolución. Cada sección está diseñada para proporcionar una comprensión técnica rigurosa, apoyada por ejemplos prácticos y problemas de aplicación real. Este texto es una referencia esencial para quien busca desarrollar competencias avanzadas en esta área del conocimiento.

PhD. Johnny Chavarría

ÍNDICE DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN 15
CAPÍTULO UNO LÓGICA MATEMÁTICA 16
Introducción 16
Proposiciones 16
Tipos de proposiciones 17
Proposición simple o atómica 17
Proposición compuesta o molecular 17
Conectores u operadores 18
Valor de Verdad 19
Tablas de verdad de los conectivos lógicos 20
Construcción de Tablas de Verdad 21
Fórmulas proposicionales equivalentes 25
CAPÍTULO DOS TEORÍA DE CONJUNTOS 27
Introducción 27
Definición de conjunto 27
Notación de conjunto 27
Formas de escribir un conjunto 28
Simbologías utilizadas en la expresión de conjuntos 29
Representación gráfica de conjuntos 30
Tipos de conjuntos 31
Operaciones entre conjuntos 36
Axiomas de las operaciones entre conjuntos 41
Operaciones considerando la cardinalidad de los conjuntos 43
CAPÍTULO TRES CONJUNTO DE NÚMEROS REALES 49
Introducción 49
Definiciones 49

Números naturales 49
Propiedades de los números naturales (N) 50
Números enteros 50
Propiedades de los números enteros (Z) 50
Números racionales 51
Números irracionales 53
Números reales 53
Axiomas de los números reales 55
Axiomas de la suma 55
Axiomas de multiplicación 55
Orden de ejecución de las operaciones con números reales 56
Reglas para sumar o restar números racionales 57
Leyes de los signos de multiplicación 59
Leyes de los signos de división 60
Reglas para multiplicar números racionales 60
Regla para multiplicar números decimales 60
Reglas para la división de números reales 61
Regla para dividir números decimales 62
Orden 63
Axiomas de orden 63
Potenciación y radicación con números reales 64
Definición de potenciación 64
Propiedades de la Potenciación 64
Potenciación fraccionaria o radicación 65
Propiedades de los radicales 67
Puntos en la recta real 69
Intervalos 70
Intervalo cerrado 70

Intervalo abierto 70
Intervalo cerrado a la izquierda, abierto a la derecha 71
Intervalo cerrado a la izquierda, infinito a la derecha 71
Intervalo abierto a la izquierda, infinito a la derecha 72
Intervalo infinito a la izquierda, cerrado a la derecha 72
Intervalo infinito a la izquierda, abierto a la derecha 73
Tanto por ciento o porcentaje 73
Definición de tanto por ciento 73
Transformación de un tanto por ciento a su forma decimal 73
Transformación de un decimal a tanto por ciento 74
Transformación de una fracción común a porcentaje 74
Transformación de un porcentaje a una fracción común 74
Problemas de aplicación del tanto por ciento 75
Valor absoluto 75
Propiedades del valor absoluto 76
CAPÍTULO CUATRO FUNCIÓN LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL 77
Función exponencial 77
Funciones exponenciales, cuando la base a > 1 77
Funciones exponenciales, cuando la base 0 < a < 1 78
Desplazamientos de la función exponencial 79
Ecuación exponencial 81
Función logarítmica 83
Definición de función logarítmica 83
Características de la función logarítmica 84
Propiedades de los logaritmos 86
Funciones logarítmicas, cuando la base a > 1 87
Funciones logarítmicas, cuando la base 0 < a < 1 88
Definición del logaritmo común 90

Propiedades de los logaritmos comunes 91
Definición del logaritmo natural o neperiano 91
Propiedades de los logaritmos naturales 91
Ecuaciones logarítmicas 93
CAPÍTULO QUINTO ECUACIONES E INECUACIONES LINEALES DE 2X2 96
Ecuaciones lineales 96
La recta 96
Ecuación general de la recta 99
Despeje de variables 99
Sistemas de ecuaciones lineales de 2 x 2 102
Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2 104
Igualación 105
Reducción o por suma o resta 105
Sustitución: 107
Inecuaciones lineales de 2x2 107
Desigualdad 107
Definiciones importantes 108
Propiedades de las desigualdades 108
Sistemas de inecuaciones lineales 109
Inecuaciones lineales de primer grado con una variable 109
Resolución de una inecuación 110
Sistemas de dos inecuaciones lineales con dos variables 113
GLOSARIO 116
BIBLIOGRAFÍA 117

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Tipos de resultados de una tabla de verdad 20

Figura 2 Conjuntos de números 54

Figura 3 Los números reales 55

Figura 4 Función exponencial natural 79

Figura 5 Función logarítmica como inversa de la función exponencial 83

Figura 6 Interpretación gráfica según el tipo de pendiente 96

Figura 7 Pendiente de la recta 97

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1 Conectivos de la lógica proposicional 18

Tabla 2 Lenguaje natural y artificial 18

Tabla 3 Tablas de verdad de los conectivos lógicos 20

Tabla 4 Propiedades de la potenciación 65

INTRODUCCIÓN

Para la aplicación de los modelos de regresión lineal simple y regresión lineal múltiple en los procesos de análisis de datos, se requiere el conocimiento de la relación funcional de variables, el coeficiente de determinación, correlación y la prueba de hipótesis; como pilares fundamentales para verificar e interpretar su significancia estadística en el intervalo de confianza.

Los temas relacionados con los modelos de regresión, el análisis de regresión, el uso de la ecuación de regresión como instrumento para estimar y predecir, análisis de residuales; son considerados en el estudio de problemas reales definidos en la economía, la administración y la salud, utilizando como plataforma de apoyo la hoja de cálculo Excel.

Se consideran en esta guía, los elementos teóricos correspondientes al análisis de regresión lineal y múltiple, como técnicas estadísticas empleadas para estudiar la relación entre variables determinísticas o aleatorias que resultan de algún tipo de investigación, en la cual se analiza el comportamiento de dos tipos de variables, una dependiente y otras independientes.

Se muestran mediante las gráficas de dispersión, el posible comportamiento de las variables, con el objetivo de desarrollar en el estudiante las competencias interpretativas y propositivas requeridas, para dimensionar integralmente la importancia de la estadística inferencial en el análisis de datos de ciencias económicas, administrativas y de la salud.

CAPÍTULO UNO

LÓGICA MATEMÁTICA

Introducción

Según (Acevedo_González, 2011), indica que este conocimiento de la lógica matemática, destaca su capacidad para construir razonamientos deductivos e inductivos; le permitan verificar hipótesis, así como generar nuevas, una competencia necesaria para proponer argumentos válidos en un ensayo o para debatir ideas.

La lógica matemática acompañada de competencias lingüísticas, ayuda a plantear mejores soluciones a diferentes tipos de problemas. En este sentido, la lógica matemática es importante porque mejora la interpretación y construcción de razonamientos lógicos, en la vida cotidiana, como en todas las áreas especializadas del conocimiento.

La lógica matemática según (Gómez_Lozano, 2017), estudia los procedimientos para distinguir si un razonamiento es correcto o incorrecto. Entrega métodos para formar proposiciones, evaluar sus valores de verdad y determinar si unas conclusiones se pueden deducir correctamente a partir de proposiciones supuestas. La lógica se interesa por las relaciones existentes entre las proposiciones, con el fin de obtener precisión, claridad y generalidad en los razonamientos.

Proposiciones

De acuerdo a (UCSC, 2020), (Acevedo_González, 2011):

Definición. – Proposición es una expresión, con sentido en algún lenguaje que afirma o niega algo y que nos proporciona información.

La proposición puede ser verdadera o falsa en un momento dado, por lo cual, el valor de verdad de una proposición lógica es, verdadero o falso, y se representa por las letras V o F.

Por esta razón se menciona que la lógica habla de lo posible, pero no de lo real; ocupándose de que la proposición tenga la posibilidad de ser verdadero o falso.

Las proposiciones se dan mediante un enunciado lingüístico, generalmente en forma gramatical de oración enunciativa, correspondiendo con los actos de habla declarativos, los cuales comunican, un hecho: “José es ecuatoriano”. Estas expresiones contienen un sujeto perfectamente definido o dado por el contexto, un predicado y una conjugación del verbo ser.

Las proposiciones se representan simbólicamente con letras minúsculas del alfabeto tales como **p, q, r, s, ..., x, y, z**, las cuales reciben el nombre de letras o variables proposicionales; haciendo el lenguaje proposicional más simple y exacto que el lenguaje natural.

Simplificando la escritura de argumentos lógicos complicados, con un lenguaje simbólico artificial, estableciendo un conjunto de reglas claras, bien definidas y que no presentan las ambigüedades ni vaguedades del lenguaje corriente o natural.

Por ejemplo:

p: La raíz cuadrada de 4 es 2: proposición verdadera.

q: Todos los carros tienen 2 ruedas: proposición falsa.

r: Los precios de los teléfonos celulares bajarán a fin de año: para decir si la proposición es falsa o verdadera, se tendría que esperar a que terminara el año.

s: Hoy tenemos clase de lógica matemática:

no es una proposición puesto que no está definido el día al que alude.

Tipos de proposiciones

Proposición simple o atómica

Son aquellas que no poseen operador lógico alguno.

p: Todos los triángulos son isósceles. (F)

q: 8 es un número par. (V)

r: 2 es el inverso multiplicativo de –2. (V)

Proposición compuesta o molecular

Son aquellas que poseen operador lógico.

- Si 3 es impar entonces 3 es menor que 6.

p: El número 3 es impar

q: El número 3 es menor que el número 6

p → q (se lee: p implica q)

- Un triángulo es equilátero si y solo si tiene sus tres lados iguales

p: Un triángulo es equilátero

q: Un triángulo tiene sus tres lados iguales

p ↔ q (se lee: p si y sólo si q)

Conectores u operadores

En la Tabla 1, se muestran algunos de los conectivos más utilizados en la lógica proposicional

con su respectivo nombre, símbolo, notación y lectura.

Tabla 1

Conectivos de la lógica proposicional

Nombre	Símbolo	Notación	Lectura
Conjunción	∧	p ∧ q	p y q
Disyunción	∨	p ∨ q	p o q
Disyunción exclusiva	$\underline{\vee}$	p $\underline{\vee}$ q	p o q, pero no ambas
Implicación - condicional	→	p → q	p implica q
Equivalencia - bicondicional	↔	p ↔ q	p si y solo si q
Negación	~	~ p	No p, es falso que p

Fuente: (Gómez_Lozano, 2017)

Algunos autores, para la negación, además del símbolo **~**, utilizan **¬** (Tabla 2)

Tabla 2

Lenguaje natural y artificial

Lenguaje Natural	Lenguaje Artificial
y	∧
o	∨
no	¬
Si ..... entonces	→
Si y sólo si	↔

Fuente: (Acevedo_González, 2011)

Ejemplos:

- Las rosas son rojas **y** tienen espinas.

p: Las rosas son rojas

q: Las rosas tienen espinas

p ^ q

- ¿La selección ecuatoriana ganó **o** perdió?

r: ¿La selección ecuatoriana ganó?

s: ¿La selección ecuatoriana perdió?

r v s

- En el país **no** hay violencia.

t: En el país hay violencia.

¬t

- **Si** estudio lógica matemática **entonces** podré determinar la validez de un razonamiento lógico

x: Estudio lógica matemática

y: Seré un destacado ingeniero de sistemas

x → y

- 4 es un número par **si y sólo si** se puede dividir por 2.

u: 4 es un número par

v: 4 es divisible por 2

u ↔ v

Valor de Verdad

Es una función que define una proposición, Verdadera (V) o Falsa (F).

Una tabla de verdad, es una representación esquemática de las relaciones entre las proposiciones; sirve para determinar los valores de verdad de las proposiciones compuestas, dependiendo de los conectivos utilizados y de los valores de verdad de sus proposiciones simples.

En la elaboración de una tabla de verdad los términos de enlace tales como la negación (**~**), la disyunción (**∨**) y la conjunción (**∧**) se consideran conectivos fundamentales; por tal razón, sus valores de verdad constituyen la base, para establecer bajo qué condiciones una proposición compuesta es verdadera o falsa.

En la Figura 1 se detallan los posibles resultados que se pueden obtener a partir de la resolución de una tabla de la verdad.

Figura 1
Tipos de resultados de una tabla de verdad



Fuente: (UCSC, 2020)

Tablas de verdad de los conectivos lógicos

A continuación, se muestran las tablas de verdad de los conectivos lógicos Tabla 3:

Tabla 3
Tablas de verdad de los conectivos lógicos

p	q	¬p	¬q	p∧q	p∨q	p⊻q	p→q	p↔q
V	V	F	F	V	V	F	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V	V	F
F	F	V	V	F	F	F	V	V

Fuente: (Acevedo_González, 2011)

Nota: Algunos autores en lugar de V (verdadero) utilizan 1 y en el caso de F (falso) utilizan 0.

Construcción de Tablas de Verdad

En la construcción de tablas de verdad, hay que considerar algunos aspectos:

1. Para determinar el valor de verdad de una proposición compuesta, es necesario elaborar la correspondiente tabla de verdad.
2. De manera individual, cada proposición tiene dos opciones de su grado de verdad: V o F. Pero cuando relacionamos en la fórmula proposicional, 2 o más variables lógicas o proposiciones; el número de posibilidades para cada caso, se la obtiene con la aplicación de la fórmula: 2^n

   Siendo n = número de variables lógicas o proposiciones
3. En la elaboración o construcción de las tablas, siempre se debe ordenar los grados de verdad de la variable de manera semejante como se indica, debido a que hay que combinar los grados de verdad de las variables; para tener todas las combinaciones posibles en la aplicación de los resultados según el tipo de conector, como se indica en Tabla 3. El **orden** es un factor determinante para evitar casos repetidos en la construcción de la tabla de verdad.

Ejemplo 1: Si tenemos dos variables p, q; el número de posibilidades a considerar para cada variable lógica será: **# posibilidades** = $2^2 = 4$; lo que significa que, para cada variable en la fórmula proposicional, debemos considerar grados de verdad. Ver tabla, a continuación

p	**conector lógico**	**q**
V		V
V		F
F		V
F		F

En la tabla, se observa:

- Que cada proposición tiene 4 grados de verdad, según el resultado obtenido de la fórmula 2^n.

- En consecuencia, el resultado de la tabla del ejemplo 1, será la columna resultados que se obtenga en la columna 2, de acuerdo al conector lógico utilizado.

Otra manera de haberse presentado la tabla del ejemplo, podría ser:

p	q	p conector lógico q
V	V	
V	F	
F	V	
F	F	

Ejemplo 2: Si se tuviera 3 variables lógicas p, q, r. La cantidad de posibilidades de verdad a considerar, sería: $2^3 = 8$ posibilidades.

p	q	r	p conector lógico q conector lógico r
V	V	V	
V	V	F	
V	F	V	
V	F	F	
F	V	V	
F	V	F	
F	F	V	
F	F	F	

Nota: En las tablas de los ejemplos 1, 2; se ha colocado los enlaces formulares:

p conector lógico q: Fórmula proposicional

p conector lógico q conector lógico r: Fórmula proposicional

Estas serían formas posibles de relacionar las proposiciones; pero podría haber varias combinaciones entre proposiciones y conectores, en la misma fórmula proposicional.

En estas fórmulas proposicionales, de manera similar como se ven en operaciones aritméticas; tienen o pueden tener los signos de agrupación como son: **( ), [ ], { }**; dando a estas relaciones formulares, prioridades de resolución del problema lógico; tal como se lo hace con las operaciones aritméticas.

Ejemplo 3: Resultados de una tabla de verdad (UCSC, 2020)

a) Tautología

p	q	$(p \wedge q)$	$(p \wedge q) \Rightarrow p$
V	V	V	V
V	F	F	V
F	F	F	V
F	F	F	V

b) Contradicción

p	q	$(p \vee q)$	$\sim (p \vee q)$	$(p \vee q) \Leftrightarrow \sim (p \vee q)$
V	V	V	F	F
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	V	F

c) Contingencia

p	q	(p ⇔ q)	∨	[(p ⇒ q) ∧ (q ⇒ p)]		
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	F	F	F	V
F	V	F	F	V	F	F
F	F	V	V	V	V	V

Ejemplo 4: Tabla de verdad de la fórmula: ((~ P → Q) ∧ (Q → R) ∧ (¬ R)) → P

P	Q	R	((	¬P	→	Q	)	∧	(	Q	→	R	)	∧	(	¬R	))	→	P
1	1	1		0	1	1		1		1	1	1		0		0		1	1
1	1	0		0	1	1		0		1	0	0		0		1		1	1
1	0	1		0	1	0		1		0	1	1		0		0		1	1
1	0	0		0	1	0		1		0	1	0		1		1		1	1
0	1	1		1	1	1		1		1	1	1		0		0		1	0
0	1	0		1	1	1		0		1	0	0		0		1		1	0
0	0	1		1	0	0		0		0	1	1		0		0		1	0
0	0	0		1	0	0		0		0	1	0		0		1		1	0
					R1			R4			R2			R5		R3			

Resultado final

Ejemplo 5: Desarrolle la tabla de verdad de la siguiente proposición ~(p ∧ ~ q)

Primero completamos las dos primeras columnas correspondientes a las proposiciones p y q, sabemos que la cantidad de filas es igual a 4 dada la fórmula 2^n, en donde n es la cantidad de proposiciones (p y q) presentes en la proposición compuesta.

p	q	~ q	(p ∧ ~ q)
V	V	F	F
V	F	V	V
F	V	F	F
F	F	V	F

Fórmulas proposicionales equivalentes

A continuación se muestran una serie de equivalencias formulares (UCSC, 2020), que servirán para realizar desarrollos a nivel de fórmula proposicional y que nos llevarán a demostrar una identidad lógica o una simplificación de la fórmula proposicional:

Ley de la doble negación:
$\sim(\sim p)\leftrightarrow p$

Leyes Asociativa:
$(p\vee q)\wedge r\leftrightarrow p\vee(q\vee r)$
$(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow r \quad p\leftrightarrow(q\leftrightarrow r)$

Leyes de Idempotencia
$p\wedge p\leftrightarrow p$
$p\vee p\leftrightarrow p$

Leyes Distributiva
$p\wedge(q\vee r)\leftrightarrow(p\wedge q)\vee(p\wedge r)$
$p\vee(q\wedge r)\leftrightarrow(p\vee q)\wedge(p\vee r)$

Leyes del Complemento
$p\wedge\sim p\leftrightarrow F$
$p\vee\sim p\leftrightarrow V$

Leyes de Morgan
$(p\wedge q)\leftrightarrow\sim p\vee\sim q$
$(p\vee q)\leftrightarrow\sim p\wedge\sim q$

Leyes de Identidad
$p\wedge V\leftrightarrow p$
$p\vee V\leftrightarrow V$
$p\wedge F\leftrightarrow F$
$p\vee F\leftrightarrow p$

Leyes de Absorción
$p\wedge(p\vee q)\leftrightarrow p$
$p\vee(p\wedge q)\leftrightarrow p$

Ley del Contra-recíproco
$(p\rightarrow q)\leftrightarrow(\sim q\rightarrow\sim p)$

Leyes Conmutativa
$p\wedge q\leftrightarrow q\wedge p$
$p\vee q\leftrightarrow q\vee p$

Leyes Asociativa
$(p\wedge q)\wedge r\leftrightarrow p\wedge(q\wedge r)$

Negaciones importantes
$\sim(p\rightarrow q)\leftrightarrow(p\wedge\sim q)$
$\sim(p\leftrightarrow q)\leftrightarrow(p\wedge\sim q)\vee(q\wedge\sim p)$

Otras leyes
$(p\leftrightarrow q) \quad (p\rightarrow q)\wedge(q\rightarrow p)$
$(p\leftrightarrow q) \quad (p\wedge q)\vee(\sim p\wedge\sim q)$
$(p\rightarrow q) \quad (\sim p\vee q)$

Ejemplos (UCSC, 2020):

1. Demuestre la siguiente proposición (p∨q)→q↔p→q

   Iniciamos de izquierda a derecha

(p∨q)→q

~(p∨q)∨q otras leyes (p→q)↔(~p∨q)

(~p∧~q)∨q Leyes de Morgan ~(p∨q)↔~p∧~q

(~p∨q)∧(~q∨q) Leyes Distributiva p∨(q∧r)↔(p∨q)∧(p∨r)

(~p∨q)∧V Leyes del Complemento p∨~p↔V

(~p∨q) Leyes de identidad p∧V↔p

(p→q) otras leyes (p→q)↔(~p∨q)

2. Simplifique la expresión (p∨q)→~p e indique cada propiedad utilizada en cada paso.

(p∨q) → ~ p

~(p∨q) ∨ ~ p Por propiedad condicional

(~p∧~q)∨~p Por leyes de Morgan

~p∨(~p∧~q) Por propiedad conmutativa

~p Por propiedad de absorción

∴ (p ∨ q) → ~ p ↔ ~ p

CAPÍTULO DOS
TEORÍA DE CONJUNTOS

Introducción

Según (Vargas_Ramírez & Plata_Zamora, 2020), la idea de conjunto forma parte del conocimiento informal que el ser humano tiene del mundo que lo rodea y en relación de sus actividades, se expresa en un lenguaje común; por ejemplo en ideas de más de uno, grupo, lote, paquete, biblioteca, selección, totalidad; conceptos matemáticos que también aparecen en distintas ramas del conocimiento matemático. Esta idea de conjunto, basada en la experiencia real y conceptual, conduce a considerar al conjunto como cualquier colección de objetos o entes bien definidos, de cualquier naturaleza con o sin relación entre ellos, llamados elementos del conjunto.

Axiomáticamente, se entiende que todo A es un conjunto y todo x es un elemento; y si cumplen con axiomas, que son premisas a comprobar su veracidad o falcedad.

Definición de conjunto

Según (Gómez_Lozano, 2017), un conjunto como una colección de objetos o varias cosas con características específicas.

Notación de conjunto

La notación de conjunto o representación por signos, es de gran utilidad para establecer una comunicación. Para representar a los conjuntos se utilizan letras generalmente mayúsculas o cualquier otro símbolo declarado: A, B, C, X, Y, Z.

Así, por ejemplo, para conjuntos específicos; el conjunto universo se denota por U o Ω, el conjunto vacío por Ø.

Y a los objetos o elementos, que son parte de los conjuntos se simbolizan por letras generalmente minúsculas o por cualquier otro símbolo declarado y se escriben entre los símbolos { }.

Ejemplos:

A = {Los alumnos de la carrera de pedagogía en matemáticas de la UCSC}

B = {a, e, i, o, u}

C = {Los números naturales mayores a 5 y menores que 10}

C= {6, 7, 8, 9}

Formas de escribir un conjunto

Según (Gómez_Lozano, 2017); los ejemplos indicados, se ve que se tiene distintas maneras de expresar un conjunto. Estas formas son: Extensión y comprensión.

Extensión:	Cuando se nombran todos los elementos del conjunto.

Esta manera de expresar, consiste en escribir a cada elemento del conjunto; separado por una coma, encerrarlos entre llaves { } y denominar al conjunto con la letra mayúscula, por ejemplo “A” o con cualquier otra.

Por ejemplo, A = {argón, neón, criptón, xenón, radón, helio}, que corresponde al conjunto de los elementos químicos de la familia de los gases nobles.

Q = {2, 4, 6, 8}, conjunto de los números pares positivos no mayores que 8.

Comprensión:	Cuando se enuncia una regla que permite hallar todos los elementos del conjunto.

Esta forma de expresar un conjunto, consiste en especificar en un conjunto encerrado entre llaves, una propiedad que deben tener los elementos, y que indica los requisitos que deben satisfacer cada elemento para pertenecer al conjunto.

En general, se puede expresar como: A = {x/ p(x)}, donde p(x) es una proposición abierta en x.

Por ejemplo, B = {x/x es un entero positivo menor que 5}, donde p(x) = x, es un número entero positivo menor que 5.

Aplicando los conceptos de proposición; se generan los elementos que cumplen las condiciones de la proposición, y a su vez un conjunto, el cual se expresa por extensión:

B = {0, 1, 2, 3, 4}

Otros ejemplos:

C = {x/2 < x < 10}, p(x) = 2 < x < 10 comprensión

D = {x/x2 – 25 = 0}, p(x) = x2 – 15 = 0 comprensión

$$H = \{x / x \in a\ los\ números\ enteros,\ \ 0 \le x < 5\}\ \ comprensión$$
$$H = \{0, 1, 2, 3, 4\}\ \ extensión$$

$$A = \{x / x\ es\ un\ número\ positivo\ par\}\ \ comprensión$$
$$A = \{2, 4, 6, 8, ...\}\ \ extensión$$

Simbologías utilizadas en la expresión de conjuntos

Para indicar que un elemento está o pertenece a un conjunto se utiliza el símbolo ∈, nexo que establece el pertenecer o estar en A, se denota por a ∈ A; y si no está, se denota por a ∉ A (se lee: a no está en A).

Otros símbolos que se usan en los conjuntos son:

⇒	implica (condición necesaria).
⇔	si, y sólo si (condición necesaria y suficiente).
∃	existe.
∀	para todo.
−	operación diferencia.
×	producto cartesiano.
∪	la operación unión.
∩	la operación intersección.
′	la operación complemento.
A	conjunto.
a	elemento.
n(a)	cardinal del conjunto A.
U	conjunto universo.
Ø	conjunto vacío.
/: tq	tal que
^ .	y; conjunción
	o; disjunción

	o exclusivo
~, ¬	no; negación
∈	pertenece
∉	no pertenece
=	igual
<	menor
>	mayor
≤	menor o igual
≥	mayor o igual
≈	aproximadamente
$\mathbb{N}$	conjunto de los números naturales
$\mathbb{Z}$	conjunto de los números enteros
$\mathbb{Q}$	conjunto de los números racionales
$\mathbb{R}$	conjunto de los números reales
$\mathbb{C}$	conjunto de los números complejos

Representación gráfica de conjuntos

Según (Acevedo_González, 2011); una forma sencilla de visualizar los conjuntos y las relaciones entre ellos, es mediante la utilización de esquemas gráficos llamados círculos de Euler o diagramas de Venn Euler.

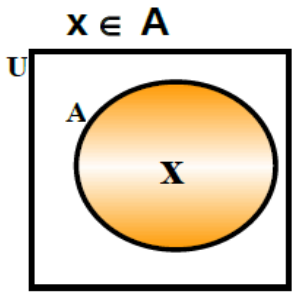
Estos gráficos, están compuestos por una región cerrada del plano (generalmente un rectángulo, cuadrado, círculo, etc.); representando al conjunto universal (rectángulo), y por uno o varios círculos que representan los conjuntos a graficar en su interior.

Entiéndase que una región cerrada, corresponde a cualquier área o superficie encerrada (empieza su trayectoria en un punto y termina ahí); es decir, es de cualquier forma y tamaño imaginable, pero finita.

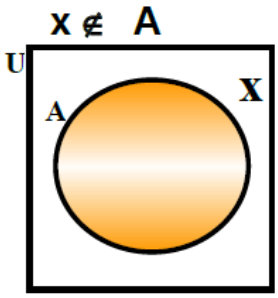
Generalmente, los conjuntos se identifican con letras mayúsculas y sus elementos con minúsculas.

Por ejemplo:

Para indicar que un elemento es un miembro de un conjunto, se utiliza el símbolo “Ɛ o ∈” (se lee pertenece a)



Para indicar que no está en el conjunto se utiliza el símbolo ∉ (se lee no pertenece a).



Tipos de conjuntos

Conjuntos Finitos: Otros, como, por ejemplo:

C = {x / x es vocal} o D = {x / x es dígito par}

Están formados por cierto número de elementos distintos, reciben el nombre de conjuntos finitos.

Al referirnos al número de elementos, debemos hablar sobre la cardinalidad de un conjunto.

La **cardinalidad de un conjunto**, es un número entero positivo, característico de éste y se denota por n(A). Los conjuntos finitos tienen cardinalidad y los infinitos no, porque no se pueden contar.

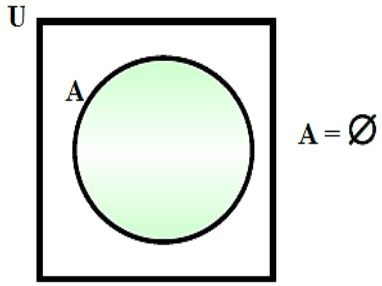
Por ejemplo, los conjuntos:

A = {a, b, c, d, e, f}, B = {2, 4, 6, 8, 10}; los conjuntos son finitos y tienen cardinalidad, se determinan contando sus elementos, es decir, n(A) = n({a, b, c, d, e, f}) = 6, y n(B) = n({0, 4, 6, 8, 10}) = 5.

Conjuntos Infinitos: Existen conjuntos como, por ejemplo:

A = {x Ɛ R / 0 ≤ x < 9} o Z = {x Ɛ N / x es par} no se pueden expresar por extensión, debido a que nunca se terminaría de escribir la lista de los números reales que pertenecen al conjunto A, o los naturales que pertenecen a Z; este tipo de conjuntos, reciben el nombre de infinitos.

Conjunto vacío: Un conjunto que no tiene o carece de elementos; se denomina conjunto vacío y se simboliza así: { } o Ø



Ø = {x/x ≠ x}

Esto, lleva implícito en su definición una condición contradictoria, que le confiere existencia.

Ø = { }; pero Ø no es igual a {0}, porque el último es un conjunto con un elemento.

Aunque el número de elementos de { } es cero, esto no significa que 0 = { } o que Ø = {0}.

Naturalmente el conjunto Ø forma parte de cualquier conjunto A, por lo cual se puede afirmar que: Ø ⊂ A

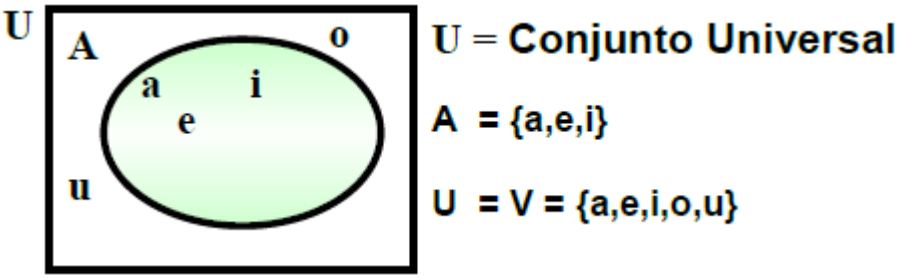
¿El conjunto Φ (vacío) es un subconjunto de todo conjunto? Respuesta: Sí, el conjunto vacío es subconjunto de sí mismo y de cualquier otro conjunto.

Ejemplo: Si D = {x Ɛ N / x ǂ x), entonces D es un conjunto que carece de elementos, no existe ningún número natural que sea diferente de sí mismo.

Conjunto universal: Conjunto Universo, es el conjunto que contiene a todos los elementos a los cuales pudiéramos hacer referencia en un momento dado, estos pueden ser infinitos o finitos. Se los denota por U o Ω.

Cuando se menciona a los conjuntos, es conveniente establecer la naturaleza de sus elementos.

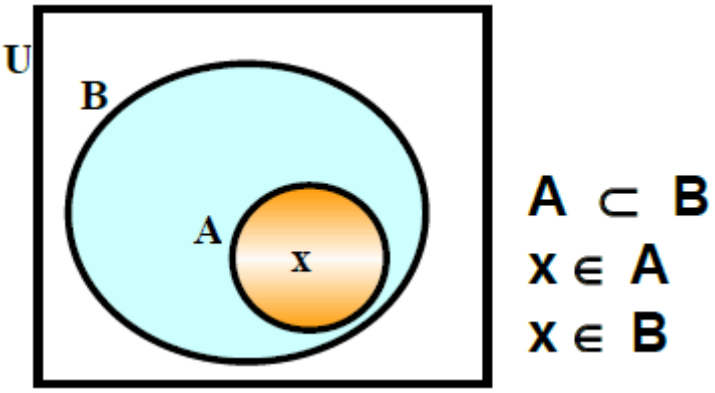
Por ejemplo: Los elementos del conjunto A = {a, e, i} pertenecen al conjunto de las vocales, V = {a, e, i, o, u}, es decir, A ⊂ V, este conjunto V representa el universo del conjunto A, por esta razón se dice que V es un conjunto Universal.



Conjuntos Disjuntos o Disyuntos:Son aquellos conjuntos, que no tienen ningún elemento en común.

Ejemplo: El conjunto de alumnos aprobados en Algebra es un conjunto disjunto con respecto a de los alumnos reprobados (UCSC, 2020).

Subconjunto: Se dice, que A es subconjunto de B, si cada elemento del conjunto A es también un elemento del conjunto B; es decir, A está contenido en B, simbolizándose por ⊂. El símbolo ⊂, denota una inclusión estricta.



Se expresa también, como: **A ⊂ B ⇔ (x ∈ A ⇒ x ∈ B)**

Se tiene también: ⊃, que hace referencia al conjunto abarcador de los otros. Por ejemplo:

A ⊂ B es equivalente a decir B ⊃ A.

Otros símbolos de la inclusión: ⊆, ⊇

El símbolo: ⊆ indica que se puede ser un subconjunto o también igual.

$A \subseteq B \Rightarrow (A \subset B \text{ o } A = B)$

$A \subseteq B$ es equivalente a decir $B \supseteq A$.

También, se puede hablar de no ser un subconjunto de otro conjunto; expresando como: Si al menos existe un elemento de B que no está en A, el conjunto B no es subconjunto del conjunto A, lo que se simboliza como: $\mathbf{B \not\subset A \Leftrightarrow (x \in B \Rightarrow x \notin A)}$

Conjuntos iguales: Se dice, que dos conjuntos A y B son iguales, si tienen los mismos elementos, no importa el orden de éstos. Se representa por: A = B.

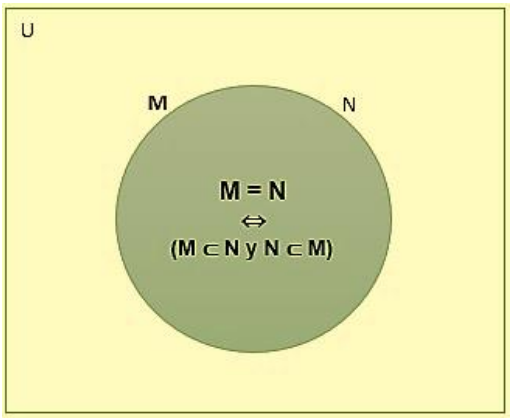
$\mathbf{A = B \Leftrightarrow (A \subset B \text{ y } B \subset A)}$ **Nota**: y =

$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$

Esta expresión, lo podríamos aclarar de la siguiente manera:

Si $(x \in A \Rightarrow x \in B)$ significa que $A \subset B$; y si $(x \in B \Rightarrow x \in A)$ significa que $B \subset A$.

Ejemplo: Si M = {1, 1, 0, 2} y N = {2, 1, 0, 1}, claramente se observa que $M \subset N$ y que $N \subset M$, por lo tanto, M = N.



Lo que nos permite concluir, que dos conjuntos son iguales si cada uno es subconjunto del otro.

Propiedades de la igualdad entre conjuntos: La relación de igualdad es reflexiva, simétrica y transitiva.

Sean A, B, C conjuntos iguales, entonces:

- Propiedad reflexiva: A = A,
- Propiedad simétrica: $(A = B) \Leftrightarrow (B = A)$

- Propiedad transitiva: $(A = B \text{ y } B = C) \Leftrightarrow (A = C)$

Conjuntos comparables: Dos conjuntos son comparables, cuando todos los elementos de uno de ellos, son también elementos del otro y se cumple que: $A \subset B$ pero $B \not\subset A$, ó $B \subset A$ pero $A \not\subset B$.

Ejemplo: $A = \{a, b, c\}$ y $A_1 = \{a, b, c, d\}$ A y A_1 son comparables: $A \subset A_1$

Conjunto potencia (Acevedo_González, 2011): Conocido también como, conjunto de partes o conjuntos de conjuntos.

Si A es un conjunto, el conjunto de partes de A, definido como P(A), está formado por todos los subconjuntos que se pueden formar del conjunto A.

Ejemplo: Si A = {1, 3, 5}, entonces el conjunto de partes de A, está formado por los siguientes subconjuntos: P (A) = {{1}, {3}, {5}, {1,3}, {1,5}, {3, 5}, {1, 3, 5}, Ø}.

$\emptyset \in P(A)$ y 2^n subconjuntos

Nota: El conjunto vacío está en todo conjunto y en este caso no es la excepción, por esta razón $\emptyset \in P(A)$. Además, cabe anotar que los elementos del conjunto A son a su vez conjuntos, por lo que se dice que el conjunto P(A) constituye una familia de conjuntos.

El número de elementos del conjunto P(A) depende del número de elementos de A; en el ejemplo, A tiene 3 elementos y P(A) tiene $8 = 2^3$ elementos, en general, Si A tiene n elementos se pueden formar 2^n subconjuntos del conjunto A.

Ejemplo: B = {2, {1, 3}, 4, {2, 5}}. B no es una familia de conjuntos o un conjunto potencia, porque algunos elementos de B son conjuntos y otros no. Para que el conjunto B fuera un conjunto de partes o una familia de conjuntos, debería estar expresado de la siguiente forma:

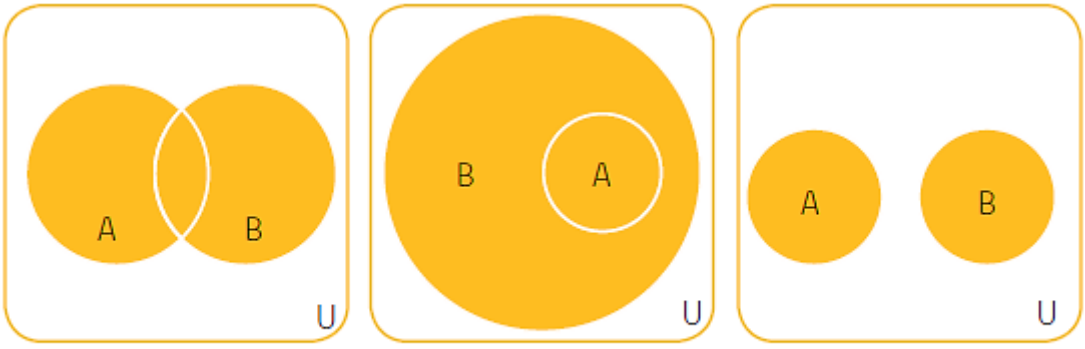
B = {{2}, {1,3}, {4}, {2,5}}

Operaciones entre conjuntos

Según (UCSC, 2020):

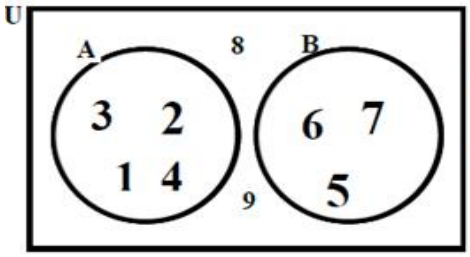
Unión entre conjuntos: La unión de A y B, es el conjunto de elementos que pertenecen a, al menos a uno de los dos conjuntos y la representaremos con:

A U B = {x / x ∈ A x ∈ B}



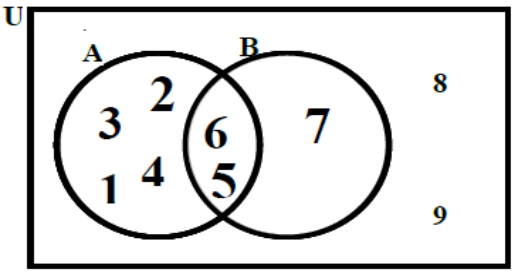
AUB A ⊂ B , AUB = B AUB

Ejemplo 1:



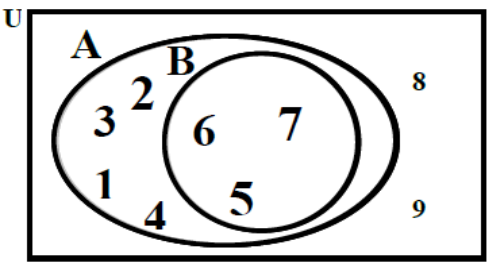
U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4}
B = {5,6,7}
A ∪ B = {1,2,3,4,5,6,7}

Ejemplo 2:



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6}
B = {5,6,7}
A ∪ B = {1,2,3,4,5,6,7}

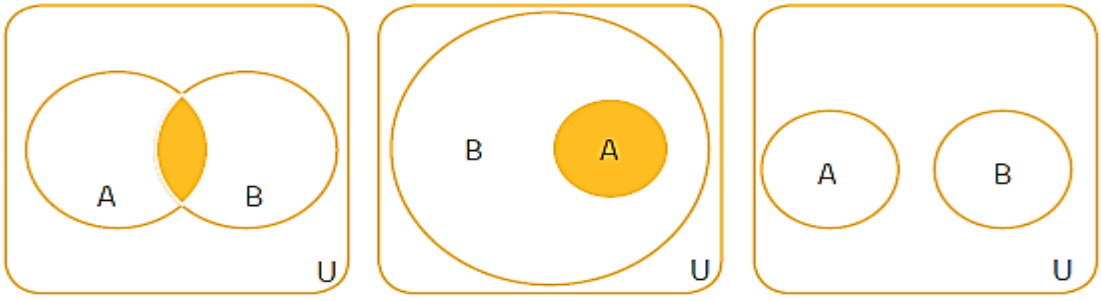
Ejemplo 3:



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {5,6,7}
A ∪ B = {1,2,3,4,5,6,7}

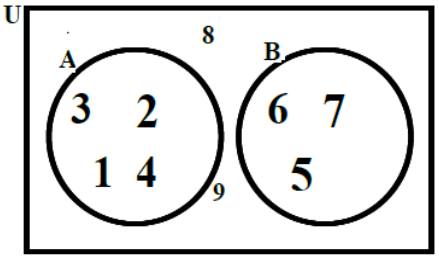
Intersección de conjuntos: La Intersección de los conjuntos A y B se define, como el conjunto formado sólo por los elementos que tienen en común A y B.

La intersección se representa por A ∩ B, simbólicamente: A ∩ B = {x / x ∈ A ∧ x ∈ B}



A∩B A ⊂ B , A∩B = A A∩B=∅

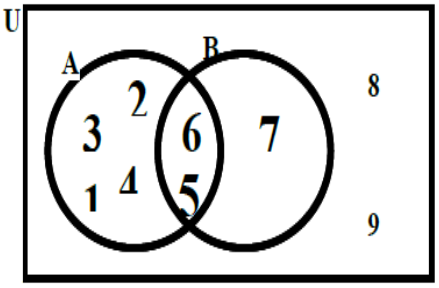
Ejemplo 1:



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4}
B = {5,6,7}

A ∩ B = { }

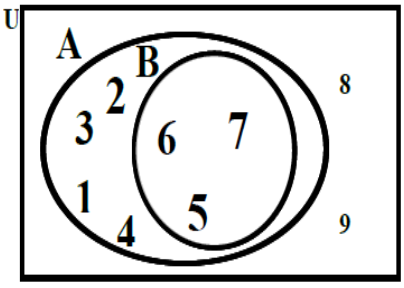
Ejemplo 2:



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6}
B = {5,6,7}

A ∩ B = {5,6 }

Ejemplo 3:



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {5,6,7}

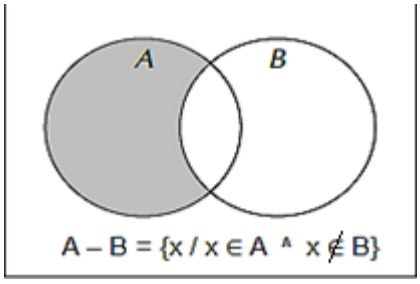
A ∩ B = {5,6,7 } = B

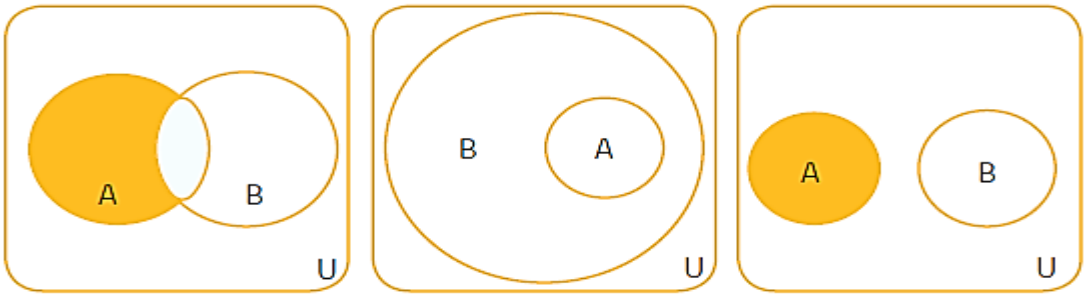
Esto permite afirmar que si, A ⊂ B entonces A ∩ B = A; análogamente se puede inferir que si, B ⊂ A entonces A ∩ B = B.

Diferencia: Si A y B son dos conjuntos no vacíos, entonces se define la diferencia entre A y B, así: $A - B = \{x / x \in A \wedge x \notin B\}$

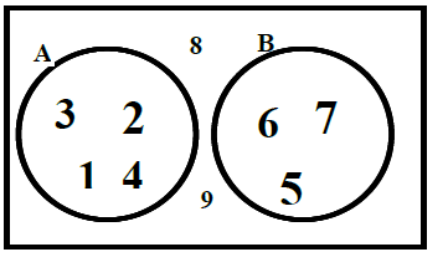
$A - B = A \cap B'$

Se interpreta o lee: A menos B, es el conjunto formado por los elementos que están en el conjunto A, pero no en el B.



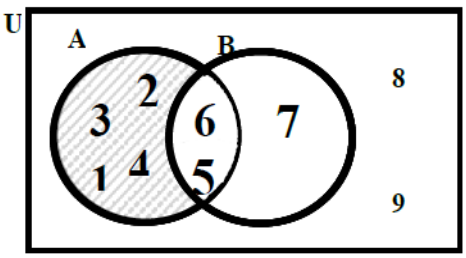


Ejemplo 1:



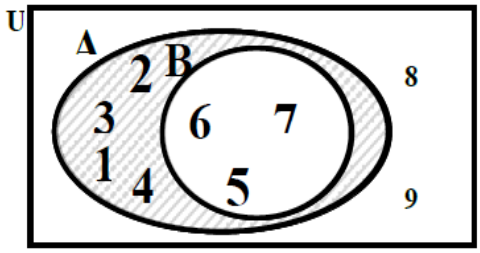
U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4}
B = {5,6,7}
A - B = A = {1,2,3,4}
B - A = B = {5,6,7}

Ejemplo 2:



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6}
B = {5,6,7}
A - B = {1,2,3,4}

Ejemplo 3:



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {5,6,7}
A - B = {1,2,3,4}
B - A = { }

En la figura, se puede observar que todos los elementos que están en B, están en A, debido a que B ⊂ A, por lo tanto, no existe ningún elemento que pertenezca a la diferencia (B – A) y en consecuencia (B – A) = Ø.

Ejemplo 4:

Dados los conjuntos: A= {1, 2, 3}, B= {2, 4, 6}

Calculemos la diferencia de conjuntos:

A – B = {1, 3}

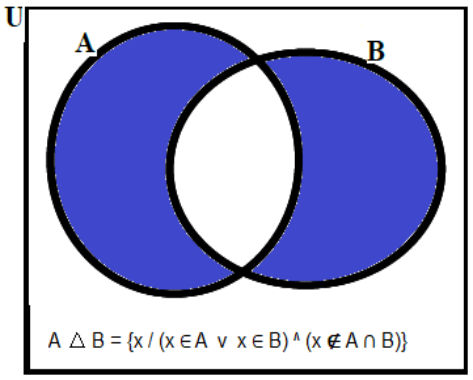
B – A = {4, 6}

Diferencia simétrica: Se define la diferencia simétrica entre dos conjuntos no vacíos A y B, como el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto A, o al conjunto B, pero no pertenecen simultáneamente a ambos conjuntos.

La diferencia simétrica entre A y B, se escribe así:

$A \triangle B = \{x / (x \in A \ \vee \ x \in B) \wedge (x \notin A \cap B)\}$

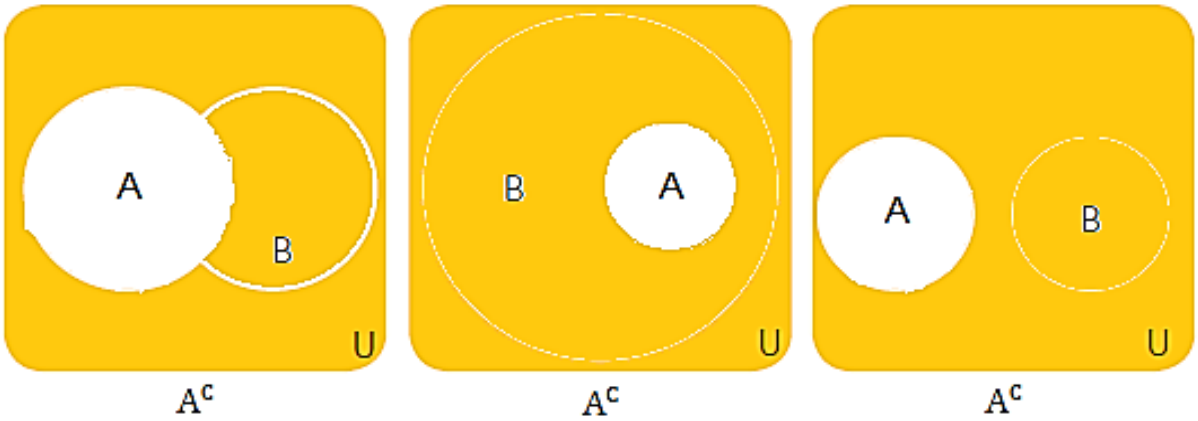
$A \triangle B = (A-B) \cup (B-A) = (A \cup B) - (A \cap B)$



Complemento: Si A es un conjunto no vacío, el complemento de A, simbolizado por A', está formado por todos los elementos que no pertenecen al conjunto A, es decir:

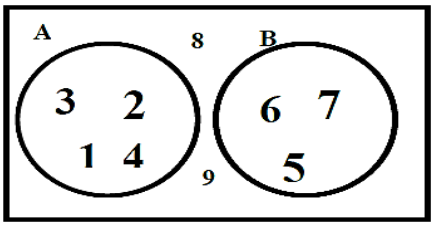
$A' = A^c = A^* = \sim A = \neg A = CA = C_A = \{x / x \notin A\}$

En las gráficas, el A^c son las áreas o superficies sombreadas.



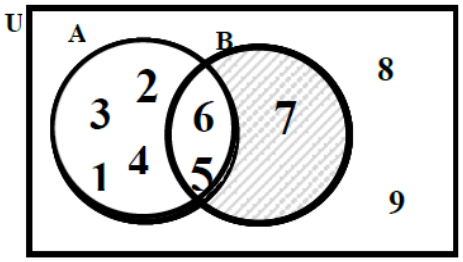
A^c A^c A^c

Ejemplo 1:



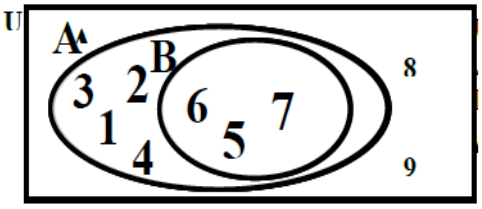
U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4}
B = {5,6,7}
A' = {5,6,7,8,9}

Ejemplo 2:



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6}
B = {5,6,7}
A' = {7,8,9}

Ejemplo 3:



U = {1,2,3,4,5,6,7,8,9}
A = {1,2,3,4,5,6,7}
B = {5,6,7}
A' = {8,9}

Axiomas de las operaciones entre conjuntos

Según (Dobarro, Schlaps, & Viñoles, 2021):

Para la unión	Propiedad	Para la intersección
$A \cup A = A$	idempotencia	$A \cap A = A$
$A \cup B = B \cup A$	conmutativa	$A \cap B = B \cap A$
$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$	asociativa	$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$	distributiva	$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$
$A \cup (A \cap B) = A$	absorción	$A \cap (A \cup B) = A$
$A \subseteq B \iff (A \cup B = B)$	inclusión	$A \supseteq B \iff (A \cap B = B)$

Para la complemetación	Propiedad
$C(CA) = A$	involutiva
$C(A \cup B) = CA \cap CB$	ley de De Morgan
$C(A \cap B) = CA \cup CB$	ley de De Morgan
$A \cup CA = U, A \cap CA = \emptyset$	

Otras propiedades de las operaciones entre conjuntos (Abarca_Calderón, s.f.):

- $\overline{S} = \emptyset$
- $\overline{\emptyset} = S$
- $\overline{\overline{A}} = A$
- $S \cup A = S$
- $S \cap A = A$
- $A \cup \overline{A} = S$
- $A \cap \overline{A} = \emptyset$
- $A \cup \emptyset = A$
- $A \cap \emptyset = \emptyset$
- $A \backslash B = A \cap \overline{B}$
- $S \backslash A = \overline{A}$
- $A \backslash \emptyset = A$
- $A \triangle B = (A \cap \overline{B}) \cup (\overline{A} \cap B)$

S: Conjunto universo

\: En lugar de “-“, para la operación de diferencia entre conjuntos

Nota: Recordar las posibles nomenclaturas de complemento.

Ejemplos:

Demuestre las siguientes igualdades:

1. $B - (A \cup C) = (B - A) \cap (B - C)$

$B - (A \cup C)$	$= B \cap (A \cup C)'$	Segunda def. de diferencia entre conjuntos $A - B = A \cap B'$
	$= B \cap (A' \cap C')$	Ley de De Morgan
	$= (B \cap A') \cap (\mathbf{B} \cap C')$	$B \cap B = \mathbf{B}$; distributiva; asociativa
	$= (B - A) \cap (B - C)$	Segunda def. de diferencia entre conjuntos $A - B = A \cap B'$

2. $(A \cap B') \cup (A \cap B) = A$

$(A \cap B') \cup (A \cap B)$	$= [(A \cap B') \cup A] \cap [(A \cap B') \cup B)]$		Distributiva
	$= [(A \cup A) \cap (B' \cup A)] \cap [(A \cup B) \cap (B' \cup B)]$		Distributiva
	$= [A \cap (B' \cup A)] \cap [(U \cup U)]$		
	$= [A \cap (B' \cup A)] \cap (U)$		
	$= A \cap (B' \cup A)$		
	$= A \cap (U - B)$		
	$= A \cap (U \cap B')$		Segunda def. de diferencia
	$= A \cap U$		
	$= A$		

3. $A - (B \cup C) = A \cap B' \cap C'$

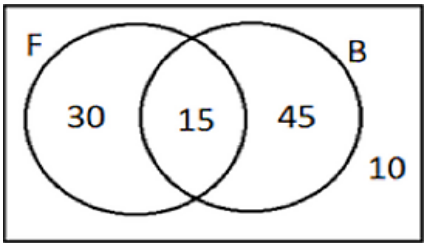
$A - (B \cup C)$	$= A \cap (B \cup C)^c$	Segunda def. de diferencia entre conjuntos $A - B = A \cap B'$
	$= A \cap B^c \cap C^c$	Ley de De Morgan

Nota: El procedimiento de demostración de este tipo de problemas, es muy semejante a lo que vimos en el Capítulo I, sobre lógica matemática.

Operaciones considerando la cardinalidad de los conjuntos

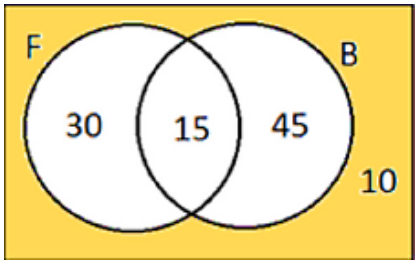
Ejemplo 1 (Gómez_Lozano, 2017):

En una encuesta realizada a 100 estudiantes sobre sus habilidades deportivas, se observó que a 45 estudiantes les gusta el fútbol, a 60 el básquetbol y a 90 les gusta por lo menos uno de los dos deportes.

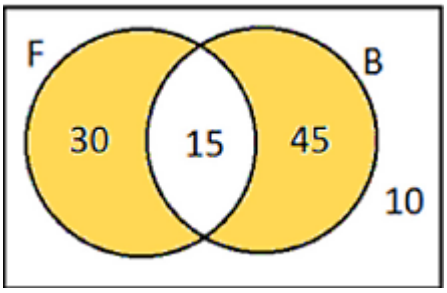


Se desea obtener la siguiente información:

a. El número de estudiantes a los que no les gusta ninguno de los dos deportes (fútbol y básquetbol). R. 10



b. El número de estudiantes a los que les gusta exactamente uno de los dos deportes. R. 75



La unión entre dos conjuntos está definida por la fórmula:

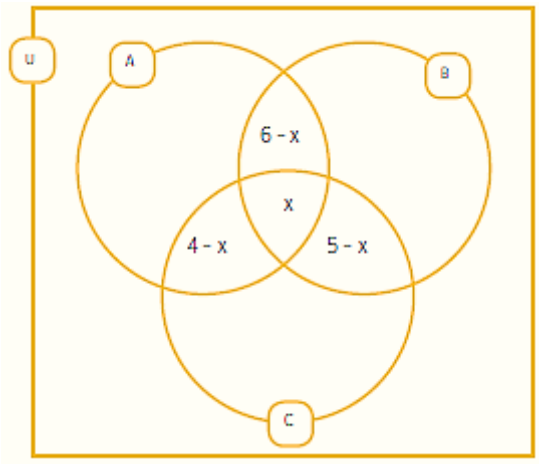
$$\eta(F \cup B) = \eta F + \eta B - \eta(F \cap B) \text{ se reemplaza}$$
$$90 = 45 + 60 - \eta(F \cap B) \text{ obteniendo}$$
$$\eta(F \cap B) = 15$$

Ejemplo 2 (UCSC, 2020):

En el Mall plaza el trébol Talcahuano se ofrecen 29 puestos de trabajo, 13 deben ser promotores, 13 vendedores y 15 cajeros. De éstos 6 tienen que ser promotores y vendedores, 4 vendedores y cajeros, y 5 promotores y cajeros. ¿Cuántos tienen que ser las tres cosas a la vez? ¿A cuántas personas que sólo tengan el oficio de promotor se les puede ofrecer empleo?

Solución:

Sea A = promotores; B = vendedores y C = cajeros, se tiene que:



|A| = 13 |B| = 13 |C| = 15 |U| = 29

|A∩B| = 6 |A∩C| = 5 |B∩C| = 4 |A∩B∩C| = x

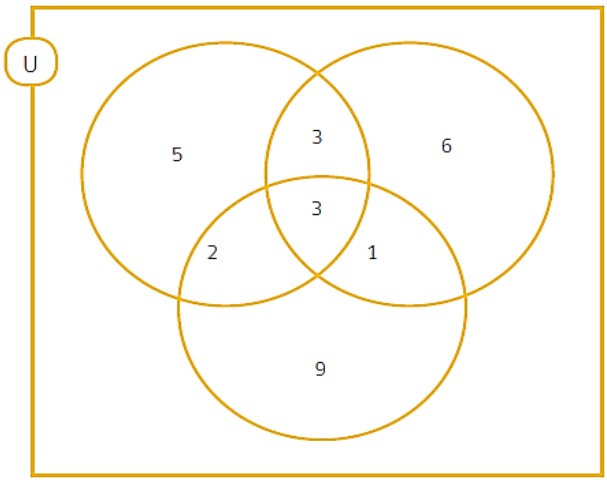
Como en total se ofrecen 29 puestos de trabajo, se aplica la siguiente fórmula de la teoría de conjunto: |AUBUC|=|A|+|B|+|C|-|A∩B|-|A∩C|-|B∩C|+|A∩B∩C|

Reemplazando:

29=13+13+15-6-5-4+x

29=26+x

x=3



Respuestas:

3 personas deben cumplir la labor de promotor, vendedor y cajero. A 5 personas se les debe contratar solamente como promotor.

Ejemplo 3 (UCSC, 2020):

Recientemente los estudiantes de la UCSC están empleando el uso de tecnologías para complementar su aprendizaje. Se realizó una encuesta sobre el tipo de aparato tecnológico que prefieren, los resultados fueron los siguientes: 60 prefieren notebook, 25 prefieren Tablet, 10 prefieren smartphone, 2 prefieren los tres aparatos, 10 prefieren notebook y Tablet, 4 prefieren Tablet y smartphone, 4 ninguno, 70 no prefieren smartphone. ¿Cuántos prefieren notebook y smartphone, pero no Tablet?

Solución:

Sea U = {Estudiantes de la UCSC}

A = {Estudiante que prefieren notebook}

B = {Estudiantes que prefieren Tablet}

C = {Estudiantes que prefieren smartphone}

$|A| = 60$ $|A \cap B| = 10$

$|B| = 25$ $|B \cap C| = 4$

$|C| = 10$ $|A \cup B \cup C|^c = 4$

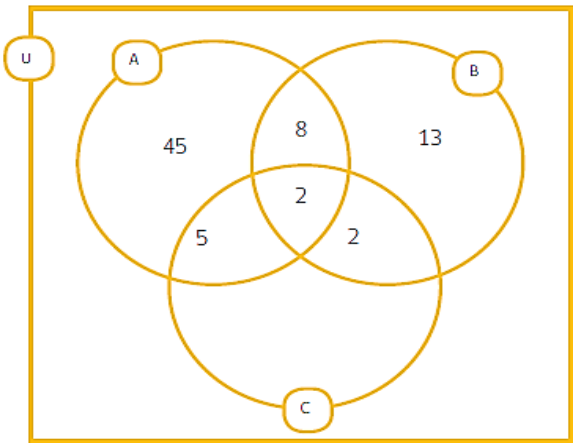
$|A \cap B \cap C| = 2$ $|C|^c = 70$

Según los datos presentados el diagrama de Venn queda de la siguiente manera:

Ahora como nos dicen que hay 70 estudiantes que no prefieren smartphone, debemos restarle a este valor los 8 estudiantes que solamente prefieren notebook y Tablet, los 13 estudiantes que solamente prefieren Tablet y los 4 estudiantes que no utilizan ninguna de estas tecnologías, tal como se muestra a continuación:

70 – 8 – 13 - 4 = 45

Estos 45 estudiantes restantes solamente prefieren utilizar el notebook, tal como se expresa en el diagrama de Venn de más abajo:



Ejemplo 4 (Vargas_Ramírez & Plata_Zamora, 2020):

Para clasificar 400 artículos producidos en una fábrica, éstos se agrupan de acuerdo con tres características. Los resultados son:

175 tienen la característica p, 199 la d y 204, la q; 95 tienen las características p y d; 94 las d y q; 90 la p y q; mientras 21 carecen de estas características.

a) ¿Cuántos de estos sólo tiene la característica p?

b) ¿Cuántos tienen las características p, d y q?

c) ¿Cuántos únicamente d y q?

d) ¿Cuántos tienen p ó d?

e) ¿Cuántos tienen únicamente 2 características?

f) ¿Cuántos tienen solamente una característica?

g) ¿Cuántos tienen al menos una característica?

Especificación de conjuntos:

U: Conjunto universo

A = {artículos con la característica p}

B = {artículos con la característica d}

C = {artículos con la característica q}

Cardinalidad de los conjuntos:

$n(U) = 400$ $n(A) = 175$ $n(B) = 199$ $n(C) = 204$ $n(A \cap B) = 95$

$n(B \cap C) = 94$ $n(A \cap C) = 90$ $n(A \cup B \cup C)' = 21$

Cálculo de los datos para construir el diagrama de Venn

Número de artículos que tiene las mismas características.

Como $n(U) = n(A \cup B \cup C) + n(A \cup B \cup C)'$ entonces $n(A \cup B \cup C) = n(U) – n(A \cup B \cup C)'$ y

$n(A) + n(B) + n(C) – n(A \cap B) – n(A \cap C) – n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = n(U) – n(A \cap B \cap C)'$,

de donde

$n(A \cap B \cap C) = n(U) – n(A \cup B \cup C)' – n(A) – n(B) – n(C) + n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C)$

$= 400 – 21 – 175 – 199 – 204 + 95 + 90 + 94 = 80.$

Número de artículos que tienen una sola característica

$n(A \cap B' \cap C') = n(A) – n(A \cap B) – n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 175 – 95 – 90 + 80 = 70$ ó

$n(A \cap B' \cap C') = n(A) – [n(A \cap B) – n(A \cap B \cap C)] – [n(A \cap C) – n(A \cap B \cap C)] – n(A \cap B \cap C)$

$= 175 – [95 – 80] – [90 – 80] – 80 = 175 – 15 – 10 – 80 = 70$

$n(A' \cap B \cap C') = n(B) – n(B \cap A) – n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 199 – 95 – 94 + 80 = 90$ ó

$n(A' \cap B \cap C') = n(B) – [n(A \cap B) – n(A \cap B \cap C)] –[n(B \cap C) – n(A \cap B \cap C)] – n(A \cap B \cap C)$

$= 199 – [95 – 80] – [94 – 80] – 80 = 90.$

$n(A' \cap B' \cap C) = n(C) – n(A \cap C) – n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) = 204 – 90 – 94 + 80 = 100$ ó

$n(A' \cap B' \cap C) = n(C) – [n(A \cap C) – n(A \cap B \cap C)] – [n(B \cap C) – n(A \cap B \cap C)] – n(A \cap B \cap C)$

$= 204 – [90 – 80] – \{94 – 80\} – 80 = 204 – 10 – 14 – 80 = 100.$

Número de artículos únicamente con dos propiedades

$n(A \cap B \cap C') = n(A \cap B) – n(A \cap B \cap C) = 95 – 80 = 15,$

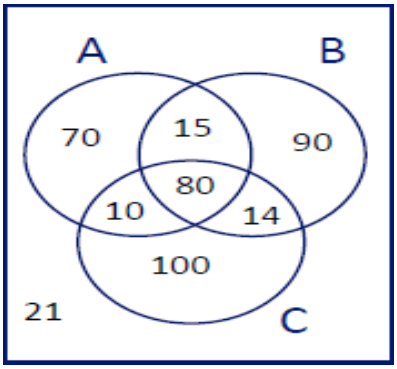
$n(A \cap B' \cap C) = n(A \cap C) – n(A \cap B \cap C) = 90 – 80 = 10$ y

$n(A' \cap B \cap C) = n(B \cap C) – n(A \cap B \cap C) = 94 – 80 = 14.$

Número de artículos que no tienen ninguna de estas características

$n(A \cap B \cap C)' = 21$

En consecuencia, el diagrama de Venn es:



Por consiguiente,

a) Los artículos que sólo tienen la característica p, son 70 = $n(A \cap B' \cap C')$

b) Los artículos que tienen ambas características son $n(A \cap B \cap C) = 80$

c) $n(A' \cap B \cap C) = 14$

d) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) – n(A \cap B) = 175 + 199 – 95 = 279$

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) – [n(A \cap B) – n(A \cap B \cap C)] – n(A \cap B \cap C) = 175 + 199 – [95 – 80]-80$

$= 175 + 199 – 15 – 80 = 279$

e) $n(A \cap B \cap C') + n(A \cap B' \cap C) + n(A' \cap B \cap C) = n(A \cap B) – n(A \cap B \cap C) + n(A \cap C)$

$– - n(A \cap B \cap C) + n(B \cap C) – n(A \cap B \cap C) = n(A \cap B) + n(A \cap C) + n(B \cap C) – 3n(A \cap B \cap$

$C) = 95 + 90 + 94 – 3(80) = 39$

f) $n(A \cap B' \cap C') + n(A' \cap B \cap C') + n(A' \cap B' \cap C) = n(A) – n(A \cap B) – n(A \cap C) +$

$+ n(A \cap B \cap C) + n(B) – n(A \cap B) – n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) + n(C) – n(A \cap C) – n(B \cap C) +$

$+ n(A \cap B \cap C) = n(A) + n(B) + n(C) – 2n(A \cap B) – 2n(A \cap C) – 2n(B \cap C) + 3n(A \cap B \cap C)$

$=175 + 199 + 204 – 2(95) – 2(90) – 2(94) + 3(80) = 260$

g) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) – n(A \cap B) – n(A \cap C) – n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) =$

$175 + 199 + 204 – 95 – 90 – 94 + 80 = 379$

CAPÍTULO TRES

CONJUNTO DE NÚMEROS REALES

Introducción

Los conjuntos numéricos representan diversas situaciones del entorno, como la cantidad de elementos que tiene un conjunto (los naturales), las partes de una unidad (los racionales), la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 (los irracionales) o diversas cantidades o entes físicos que están compuestos por una parte real y otra imaginaria (los complejos).

Los conjuntos numéricos, son los: Naturales ($\mathbb{N}$), enteros ($\mathbb{Z}$), racionales ($\mathbb{Q}$), irracionales ($\mathbb{Q}^*$), reales ($\mathbb{R}$) y complejos ($\mathbb{C}$). Estos son utilizados en diversas situaciones del conocimiento.

Definiciones

Según (Alvarez, Caballero, & Sánchez, s.f.), (Rivera, 2013), (Alvarez, Caballero, & Sánchez, s.f.), (Esteban_Duarte, s.f.); los conjuntos de números Figura 2, Figura 3; se los puede escribir así:

Números naturales

$$N= \{1; 2; 3; \ldots\}$$

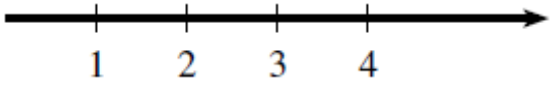
Ejemplo: Expresar el conjunto de los números naturales menores que 7:

Solución:

a. A = {1, 2, 3, 4, 5, 6} por extensión

b. B = {x / x es un número natural menor que 7} por comprensión

Los naturales, se los representa en una recta, ubicando hacia la derecha la secuencia 1, 2, 3, ... a una distancia fija, denominada unidad, como se ilustra a continuación:



Propiedades de los números naturales (N)

- Todo número natural n tiene un sucesor, es decir; para n ∈ N, entonces (n+1) ∈ N es el consecutivo de n.

  Por ejemplo: 5 ∈ N, entonces 5+1 = 6 ∈ N.

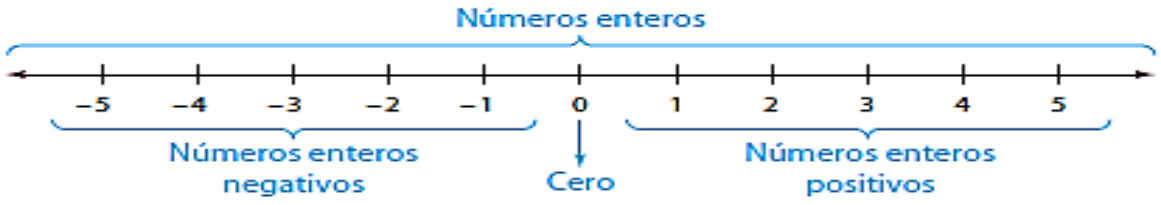
- Entre dos números naturales consecutivos, no existe otro número natural.
- Todo número natural n > 2, se puede descomponer en factores primos.

  Por ejemplo: 30 = 2×3×5, en los que 2, 3 y 5 son números primos.

Números enteros

$$Z= \{0; \pm1; \pm2; \pm3; \ldots\ldots\}$$

Se representa a los Z en una recta numérica, se toma una longitud fija como unidad, se ubica el 0 (cero) y los valores a la derecha de cero son positivos y a la izquierda son de signo negativo. Esta situación se ilustra en la siguiente gráfica:



Propiedades de los números enteros (Z)

- No tiene primero ni último elemento.
- Entre dos enteros consecutivos, no existe ningún otro entero.
- Si n es un número entero, existe −n ∈ Z, tal que n+(−n) = 0. Es decir, todo número entero, tiene un inverso aditivo.
- Al sumar, restar o multiplicar dos números enteros, el resultado es otro número entero.

Ejemplos:

1.- Los inversos aditivos de los números enteros (Z) 20 y −5 son, respectivamente:

a. 5 y −20

b. −20 y −5

c. −20 y 5

d. 20 y 5

2.- El número entero, que al sumarlo con 10 da 0 (cero), es −10:

a. V (Verdadero)

b. F (Falso)

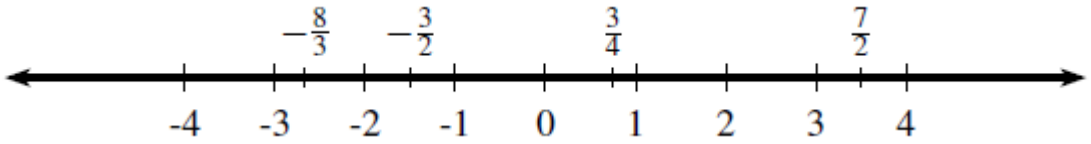
Números racionales

Q= $\{\frac{a}{b} / \text{ a, b} \in \text{Z, b} \neq 0\}$. Incluye a los números enteros y fraccionarios.

Los números racionales Q permiten representar partes de una unidad. Tienen la propiedad de que se pueden escribir como el cociente de dos números enteros, a / b, en el que a es el numerador y b el denominador, que no puede ser 0 (cero), no existe la división para cero.

Todos los números enteros son números racionales, ya que cualquier entero se puede expresar como la división entre él mismo y el 1, es decir si n ∈ Z, n = (n / 1) ∈ Q.

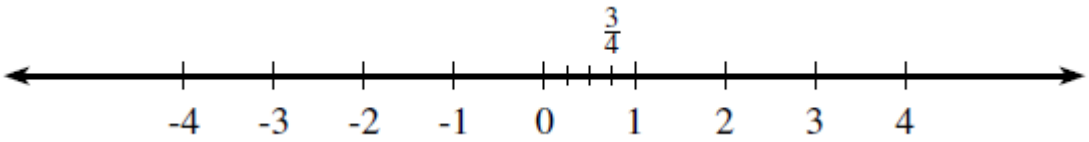
Los racionales se representan en la recta, de la siguiente forma:



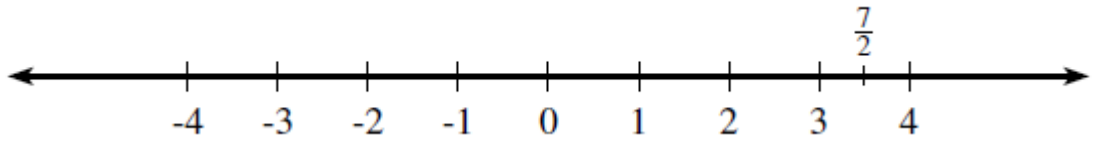
Note que los números racionales, con numerador menor que el denominador, se representan entre 0 y 1; si tanto el numerador como el denominar son positivos o ambos negativos, por las leyes de los signos son positivos.

Si el numerador es positivo y el denominador negativo, o viceversa; el número racional se ubica entre −1 y 0.

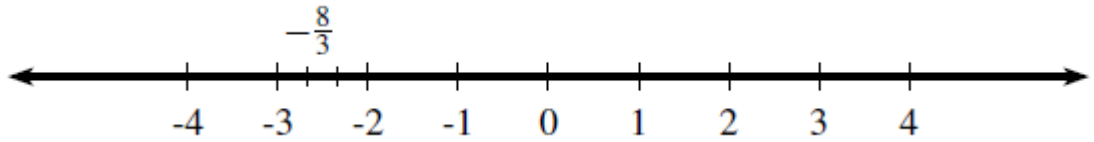
Por ejemplo, para representar la fracción 3 / 4, se divide la unidad en cuatro partes iguales, y sobre la tercera, a la derecha, se escribe la fracción, como se ilustra en la siguiente gráfica.



Cuando el número racional, tiene numerador mayor o igual que el denominador, por ejemplo 7 / 2; se expresa de la siguiente forma: 7 / 2 = 3 + 1 / 2. Se toman 3 unidades a la derecha del cero y se le suma 1 / 2 de la unidad, como se muestra en la siguiente gráfica:



Como −8 / 3= −2− 2 / 3, es negativo, se toman 2 unidades a la izquierda de cero y se le restan 2 / 3 de la siguiente unidad, como se muestra en la siguiente gráfica.



Los racionales se pueden escribir en forma decimal, para ello se realiza la división entre el numerador y el denominador.

Ejemplos:

$\frac{8}{4} = 2$

$\frac{7}{2} = 3.5$

$\frac{8}{3} = 2.66666666...$

$\frac{1}{3} = 0.333333...$

$\frac{1}{4} = 0.25$

$\frac{25}{7} = 3.571428571428...$

Obs: Algunos racionales se corresponden con números enteros, otros tienen una sola cifra decimal, para otros la misma cifra decimal se repite indefinidamente y por último, otros tienen varias cifras decimales que se repiten en la misma secuencia indefinidamente.

Entonces, a los números racionales cuyas cifras se repiten indefinidamente se llaman periódicos y a las cifras que se repiten se les llama el período. Por ejemplo: para 8 / 3 el período es 6, mientras que para 25 / 7, el período es 571428.

Números irracionales

Todos los números que no se pueden escribir como $\frac{a}{b}$, a, b ∈ Z, b ǂ 0

Ejemplos:

$$\pi = 3.141592654...$$

$$e = 2.718281828...$$

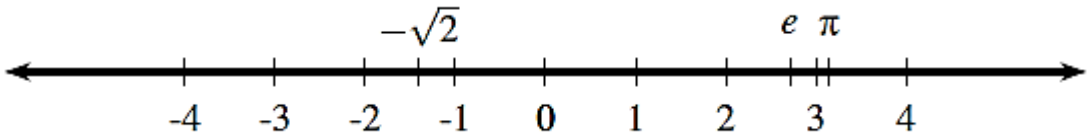
$$-\sqrt{2} = -1.414213562...$$

$$\sqrt{3} = 1.732050808...$$

$$\frac{\sqrt{5}}{2} = 1.1188033989...$$

$$-\pi^2 = -9.869604401...$$

Los irracionales se representan, marcando un punto de origen como 0 (cero), y tomando una longitud fija como unidad. A la derecha del cero se escriben los irracionales positivos y a la izquierda los negativos:



En un sin número de aplicaciones de la matemática aparecen los números irracionales, así, por ejemplo: π (en ecuaciones que tienen que ver con circunferencias), e (como base del logaritmo natural) y, Ø = 1.618033989... (el número áureo, utilizado en la arquitectura y en las artes).

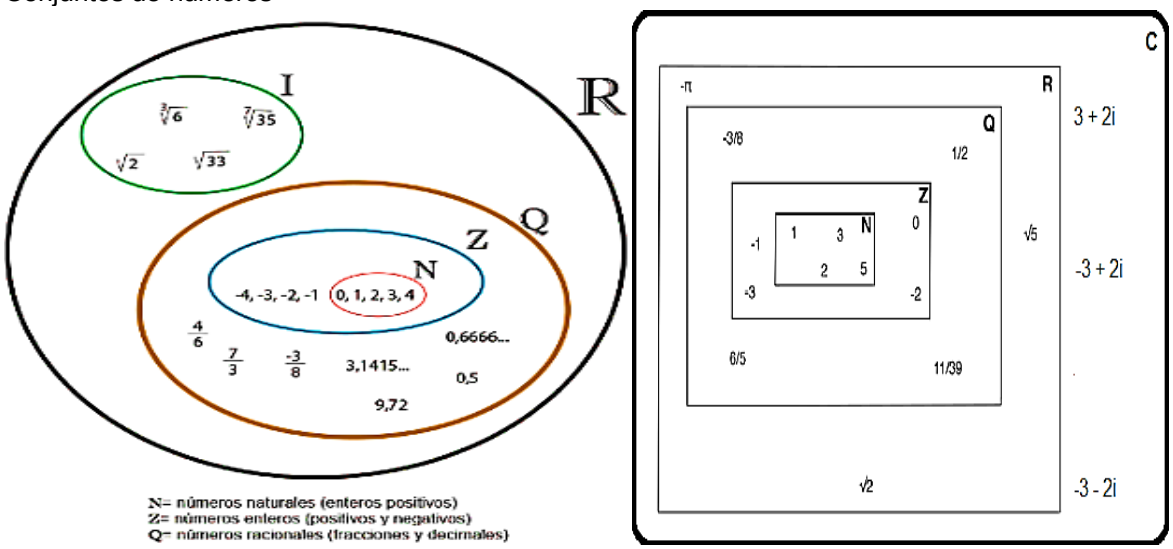
Números reales

R es la unión de los números racionales e irracionales N ⊆ Z ⊆ Q ⊆ R.

Se puede también representar a los números reales Figura 2, Figura 3, como: R = Q ∪

I

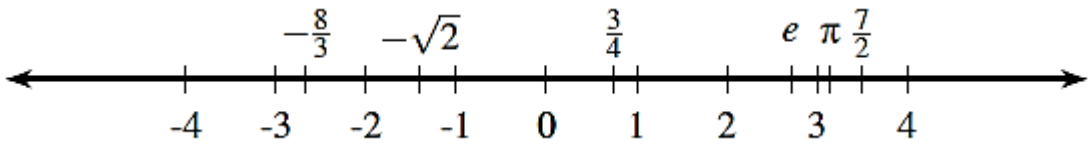
Figura 2
Conjuntos de números



Fuente: (La Luz, s.f.)

Gráficamente se dibuja a los números reales R en una recta orientada, a la que se le marca un punto de referencia, que se denota como cero (0). A la derecha del cero (0), los números

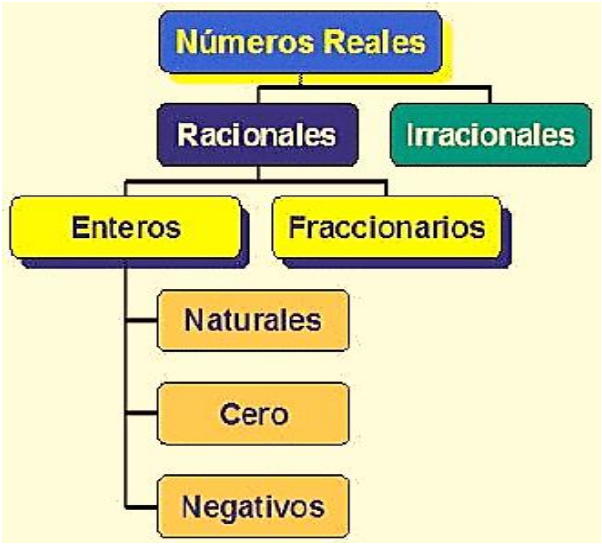
reales positivos y a la izquierda los negativos. La representación gráfica más usual es:



Otra forma de representar la recta real es escribiendo un intervalo abierto en el que sus extremos son $-\infty$

y $+\infty$, es decir $(-\infty,\infty)$. Note que cuando se escribe ∞ no se le antecede el signo +, se entiende que es positivo.

Figura 3
Los números reales



Fuente: (Rivera, 2013)

Axiomas de los números reales

Axiomas de la suma

Si a, b y c son números reales entonces:

1. Clausura: a + b es un número real
2. Asociativo: (a + b) + c = a + (b + c)
3. Conmutativo: a + b = b + a
4. Existencia de Unidad (identidad aditiva): Existe un único número real llamado cero y denotado por 0 tal que 0 + a = a + 0 = a
5. Opuesto: Para cada a existe un único número llamado el opuesto de a y denotado por -a tal que a + (-a) = -a + a = 0

Axiomas de multiplicación

1. Clausura: ab es un número real
2. Asociativo: (ab)c=a(bc)
3. Conmutativo: ab=ba
4. Existencia de Unidad (identidad multiplicativa): Existe un único número real llamado uno y denotado por 1 tal que 1a=a1=a.

5. Recíproco: Para cada a≠ 0 existe un único número llamado el recíproco de a y denotado por $\frac{1}{a}$ tal que a·$\frac{1}{a}$ = $\frac{1}{a}$· a =1

6. Axioma Distributivo (**axioma de la suma y la multiplicación**): Si a, b y c son números reales, entonces a(b + c) = ab + ac

Ejemplos:

Indique, cuáles axiomas se usaron para realizar las siguientes operaciones:

a) 3 + (2 + 1) = (3 + 2) + 1 axioma asociativo de la suma

b) 2(3 + 4) = (3 + 4)2 axioma conmutativo de la multiplicación

c) 2 · (3 · 4) = 2 · (4 · 3) axioma conmutativo de la multiplicación

Hay otras proposiciones, llamados **teoremas**, como:

1.- Para cualquier número real a, a · 0 = 0

2.- Para cualquier número real a, −a = (−1) · a

3.- Si *a*, *b* ∈ **R** entonces

1) –0 = 0

2) (-*a*)*b* = *a*(-*b*) = -(*ab*)

3) (-*a*)(-*b*) = *ab*

4) -(-*a*) = *a*

5) $\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}$

Nota: Estos teoremas, al ser demostrados en su igualdad, podrían asumirse como otros axiomas.

Orden de ejecución de las operaciones con números reales

1.- Las operaciones dentro de paréntesis y/o corchetes de adentro hacia afuera.

2.- Los exponentes.

3.- La multiplicación y la división de izquierda a derecha.

4.- La suma y la resta de izquierda a derecha.

Ejemplos:

a) $[2 + (2 - 3)] \cdot (-2) = [2 + (2 - 3)] \cdot (-2) = (2 - 1) \cdot (-2) = (1) \cdot (-2) = -2$

b) $5 - 4 \cdot 2^3 = 5 - 4 \cdot 8 = 5 - 32 = -27$

Definición: Si a y b son números reales, entonces definimos:

1) La resta: $a - b = a + (-b)$

2) La división: $\frac{a}{b} = a \div b = ab^{-1}$

Ejemplos:

a) $3 - 4 = 3 + (-4)$

b) $\frac{3}{4} = 3*4^{-1}$

Simplifica: $12 - 24(8 - 5) \div 2^2$

$12 - 24(8 - 5) \div 2^2$

$= 12 - 24(3) \div 2^2$ • Realiza las operaciones dentro de los símbolos de agrupación.

$= 12 - 24(3) \div 4$ • Simplifica las expresiones con exponentes.

$= 12 - 72 \div 4$ • Realiza la multiplicación y la división según ocurren de izquierda a derecha.

$= 12 - 18$

$= -6$ • Realiza la suma y la resta según ocurren de izquierda a derecha.

Simplifica: $6 \div [4 - (6 - 8)] + 2^2$

$6 \div [4 - (6 - 8)] + 2^2$

$= 6 \div [4 - (-2)] + 2^2$ • Realiza las operaciones dentro de los símbolos de agrupación internos.

$= 6 \div 6 + 2^2$ • Realiza las operaciones dentro de los símbolos de agrupación externos.

$= 6 \div 6 + 4$ • Simplifica las expresiones con exponentes.

$= 1 + 4$ • Realiza la multiplicación y la división.

$= 5$ • Realiza la suma y la resta.

Reglas para sumar o restar números racionales

1.- Para sumar dos fracciones que tienen, el mismo denominador, se procede a sumar el numerador y se coloca el mismo denominador.

Ejemplos:

$$\frac{4}{5} + \frac{3}{5} = \frac{4 + 3}{5} = \frac{8}{5}$$

$$\frac{-4}{5}+\frac{3}{5}=\frac{-4\ +\ 3}{5}\ =\ \frac{-1}{5}$$

2.- Cuando se tiene denominadores distintos, lo que se debe hacer es, escribirlos primero con el mismo denominador, amplificando o buscando el M.C.M.

- Amplificar una fracción, es multiplicar su numerador y su denominador por un mismo número natural.
- El **M.C.M**. es el producto de todos múltiplos comunes con su menor exponente.
- El **M.C.D**. es el producto de todos los múltiplos comunes y no comunes con su mayor exponente.

Ejemplos:

1.- M.C.M. (5; 40) = 1 * 5 = 5	M.C.D. (5; 40) = 1 * 2^3 * 5 = 40
5 = 1 * 5	5 = 1 * 5
40 = 1 * 2^3 * 5	40 = 1 * 2^3 * 5
2.- M.C.M. (20; 60) = 1 * 2^2 * 5 = 20	M.C.D. (20; 60) = 1 * 2^2 * 3 * 5 = 60
20 = 1 * 2^2 * 5	20 = 1 * 2^2 * 5
60 = 1 * 2^2 * 3 * 5	60 = 1 * 2^2 * 3 * 5
3.- M.C.M. (20; 60; 80) = 1 * 2^2 * 5 = 20	M.C.D. (20; 60; 80) = 1 * 2^4 * 3 * 5 = 240
20 = 1 * 2^2 * 5	20 = 1 * 2^2 * 5
60 = 1 * 2^2 * 3 * 5	60 = 1 * 2^2 * 3 * 5
80 = 1 * 2^4 * 5	80 = 1 * 2^4 * 5

Nota: El número 1, es el menor de los múltiplos primos de cualquier número.

Ejemplos de números racionales con denominadores distintos:

$$\frac{4}{8}+\frac{3}{5}=\frac{5*4\ +\ 8*3}{40}\ =\ \frac{44}{40}\ =\ \frac{11}{10}$$

M.C.D. (8; 5) = 1 * 2^3 * 5 = 40

8 = 1 * 2^3

5 = 1 * 5

$$\frac{4}{8} - \frac{3}{5} = \frac{5*4 - 8*3}{40} = \frac{-4}{40}$$

$$= -\frac{1}{10}$$

M.C.D. (8; 5) = 1 * 2^3 * 5 = 40

8 = 1 * 2^3

5 = 1 * 5

$$\frac{-4}{8} - \frac{3}{5} = \frac{-5*4 - 8*3}{40} = \frac{-44}{40}$$

$$= -\frac{11}{10}$$

M.C.D. (8; 5) = 1 * 2^3 * 5 = 40

8 = 1 * 2^3

5 = 1 * 5

Simplifica: $-\frac{3}{4} + \frac{1}{6} - \frac{5}{8}$

$$-\frac{3}{4} + \frac{1}{6} - \frac{5}{8} = -\frac{18}{24} + \frac{4}{24} - \frac{15}{24}$$

- **M.C.D. (4; 6; 8) = 24**

$$= \frac{-18}{24} + \frac{4}{24} + \frac{-15}{24}$$

$$= \frac{-18 + 4 + (-15)}{24}$$

- **Suma los numeradores y coloca la suma encima del común denominador.**

$$= \frac{-29}{24}$$

$$= -\frac{29}{24}$$

Leyes de los signos de multiplicación

- El producto de dos números del mismo signo es positivo.
- El producto de dos números de signo contrario es negativo.

(+) (+) = (+)

(-) (+) = (-)

Ejemplos

1.- Multiplicar (-5)2 = - 10

2.- Multiplicar (-9) (- 8) = + 72

3.- Multiplicar 4 (3 x 6) = 4 x 18 = 72

4.- Resolver 5 + 2 x 3 = 5 + 6 = 11

Leyes de los signos de división

- El cociente de dos números del mismo signo es positivo.
- El cociente de dos números de signo contrario es negativo.

$$\left(\frac{+}{+}\right) = (+) \quad \left(\frac{-}{-}\right) = (+) \quad \left(\frac{-}{+}\right) = (-) \quad \left(\frac{+}{-}\right) = (-)$$

Reglas para multiplicar números racionales

Para multiplicar dos fracciones se deben multiplicar los numeradores entre sí y colocarlos sobre la multiplicación de los denominadores entre sí.

Ejemplos:

1. $\frac{4}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{4 \times 3}{5 \times 5} = \frac{12}{25}$ 2. $-\frac{4}{5} \times \frac{3}{8} = -\frac{4 \times 3}{5 \times 8} = -\frac{1 \times 3}{5 \times 2} = -\frac{3}{10}$

Realizar las siguientes operaciones combinadas con fracciones:

a) $\frac{3}{5} + \frac{5}{8} = \frac{24 + 25}{40} = \frac{49}{40}$

b) $\frac{5}{4} - \frac{1}{2} + \frac{2}{5} = \frac{25 - 10 + 8}{20} = \frac{23}{20}$

c) $\frac{8}{15} \cdot \frac{2}{3} = \frac{8 \cdot 2}{15 \cdot 3} = \frac{16}{45}$

d) $\frac{32}{21} \div \frac{3}{5} = \frac{32 \cdot 5}{21 \cdot 3} = \frac{160}{63}$

e) $\frac{1}{5} + \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{5} + \frac{3 \cdot 1}{2 \cdot 5} = \frac{1}{5} + \frac{3}{10} = \frac{2+3}{10} = \frac{5}{10} = \frac{5}{2 \cdot 5} = \frac{1}{2}$

Regla para multiplicar números decimales

Para multiplicar decimales, hazlo igual que en la multiplicación de números enteros.

Escribe

el punto decimal en el producto, de manera que el número de posiciones decimales en el producto sea igual a la suma de las posiciones decimales en los factores.

Multiplica: $(-6.89)(0.00035)$

$$\begin{array}{rl} 6.89 & 2 \text{ posiciones decimales} \\ \times\ 0.00035 & 5 \text{ posiciones decimales} \\ \hline 3445 & \\ 2067 & \\ \hline 0.0024115 & 7 \text{ posiciones decimales} \end{array}$$

- **Multiplica los valores absolutos.**

$(-6.89)(0.00035) = -0.0024115$

- **Los signos son diferentes. El producto es negativo.**

Reglas para la división de números reales

Para dividir dos números fraccionarios multiplicamos la primera por el recíproco de la segunda, que debe ser distinta de cero; así:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{a \times d}{b \times c}$$

O por la multiplicación de los números extremos a, d de la fracción, sobre la multiplicación de los números medios b, c.

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{a * d}{b * c}$$

Nota: Si hay cantidades múltiplos entre las cantidades del numerador y del denominador, se puede simplificarles.

Ejemplos:

$$\frac{2}{3} \div \frac{4}{5} = \frac{2}{3} \times \frac{5}{4} = \frac{10}{12} = \frac{5}{6} \qquad \frac{3}{4} \div \frac{5}{7} = \frac{3}{4} \times \frac{7}{5} = \frac{3 \times 7}{4 \times 5} = \frac{21}{20}$$

Divide: $\frac{3}{10} \div \left(-\frac{18}{25}\right)$

$$\frac{3}{10} \div \left(-\frac{18}{25}\right) = -\left(\frac{3}{10} \div \frac{18}{25}\right)$$

- **Los signos son diferentes. El cociente es negativo.**

$$= -\left(\frac{3}{10} \cdot \frac{25}{18}\right)$$

- **Cambia la división a multiplicación e invierte el divisor.**

$$= -\left(\frac{3 \cdot 25}{10 \cdot 18}\right)$$

- **Multiplica los numeradores. Multiplica los denominadores.**

$$= -\left(\frac{\overset{1}{\cancel{3}} \cdot \overset{1}{\cancel{5}} \cdot 5}{2 \cdot \underset{1}{\cancel{5}} \cdot 2 \cdot \underset{1}{\cancel{3}} \cdot 3}\right)$$

$$= -\frac{5}{12}$$

Regla para dividir números decimales

Para dividir decimales, mueve el punto decimal en el divisor para hacer que sea un número entero. Mueve el punto decimal el mismo número de posiciones hacia la derecha en el dividendo. Coloca el punto decimal en el cociente, directamente arriba del punto decimal en el dividendo. Después divide como en la división de números enteros.

Ejemplos:

1.- 420 dividir para 12:

$$\begin{array}{r} 4\ 2\ 0 \mid 1\ 2 \\ -\ 3\ 6 \quad\ \ 3\ 5 \\ \hline 0\ 6\ 0 \\ -\ 6\ 0 \\ \hline 0 \end{array}$$

Dividendo: 420 Divisor: 12 Cociente u cuociente: 35 Residuo: 0

2.- Dividir 3.202,5 entre 15

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 0\ 2,\ 5 \mid 1\ 5 \\ -\ 3\ 0 \quad\ \ \ \ 2\ 1\ 3,\ 5 \\ \hline \quad 2\ 0 \\ -\ 1\ 5 \\ \hline \quad\ \ 5\ 2 \\ -\ 4\ 5 \\ \hline \quad\ \ \ \ 7\ 5 \\ -\ 7\ 5 \\ \hline -\quad\ \ \ \ 0 \end{array}$$

Dividendo: 3.202,5 Divisor: 15 Cociente u cuociente: 213,5 Residuo: 0

Orden

Según (La Luz, s.f.):

Definición: Si a, b ∈ R, a < b si b - a > 0.

Ejemplos:

Determine si los siguientes enunciados son ciertos o falsos usando la definición:

a) 3 < 4

4 – 3 = 1 > 0, por la definición, es cierto.

b) 5 < 1

1 – 5 = -4 < 0, es falso.

Al igual que los axiomas de los números reales rigen el comportamiento de la suma y la multiplicación, los axiomas de orden rigen la interacción entre esta relación con ella misma, la suma y la multiplicación.

Axiomas de orden

Si a, b, c ∈ R, entonces:

1) (aditividad): Si a < b entonces (a + c) < (b + c)

2) (transitividad): Si a < b y b < c entonces a < c

3) (multiplicatividad): Si a < b y c > 0 entonces ac < bc

Ejemplos:

Determine cuál axioma de orden se usa para justificar los siguientes enunciados:

a) Si 2 < 3 entonces 2 + 2 < 3 + 2 Axioma de aditividad

4 < 5

b) Si 2 < 3 y 3 < 4 entonces 2 < 4 Axioma de transitividad

c) Si 2 < 3 y 4 > 0, entonces 2*4 < 3*4 Axioma de la multiplicatividad

8 < 12

¿Qué ocurre con el axioma de la multiplicatividad de orden si c < 0?

Teorema: Si a < b y c < 0 entonces bc < ac

Indicando que, al multiplicar por un número negativo, el orden se invierte. Es decir, cambia el sentido de la desigualdad.

Ejemplo:

a) Si 3 < 5, entonces 3(-2) > 5(-2), esto es –6 > -10

Notación: La expresión a ≤ b quiere decir a < b o a = b. Por lo tanto, sería incorrecto escribir 4 < 4 pero sería correcto escribir 4 ≤ 4. Los axiomas de orden tendrían un equivalente usando el símbolo ≤.

Potenciación y radicación con números reales

Definición de potenciación

Según (Rivera, 2013), la expresión x^n se llama potencia; donde x es la base y n el exponente.

Por ejemplo, b^3 se lee b a la tercera potencia o b al cubo; 3 es el exponente y b es la base.

La definición, implica que x se utiliza como un factor n veces:

$X^n = x \cdot x \cdot x \cdot x \ldots\ldots x$

n veces

Donde: $n \in Z$, $x \in R$

Ejemplos:

$3^5 = 3 * 3 * 3 * 3 * 3$

$(-6)^3 = (-6) * (-6) * (-6)$

$- 6^3 = - (6) * (6) * (6)$

$(2x)^4 = (2x) * (2x) * (2x) * (2x)$

Propiedades de la Potenciación

En Tabla 4 adjunta, ver las propiedades de los exponentes:

Tabla 4
Propiedades de la potenciación

Propiedad	Ejemplo
(1) $x^m x^n = x^{m+n}$	$2^3 2^4 = 2^{3+4} = 2^7 = 128$
(2) $(x^m)^n = x^{mn}$	$(2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12} = 4{,}096$
*(3) $\frac{x^m}{x^n} = x^{m-n}$	$\frac{2^5}{2^3} = 2^{5-3}$
*(4) $\frac{x^m}{x^n} = \frac{1}{x^{n-m}}$	$\frac{2^3}{2^5} = \frac{1}{2^{5-3}} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$
(5) $(xy)^n = x^n y^n$	$(20)^3 = (2 \times 10)^3 = 2^3 10^3 = 8 \times 1{,}000 = 8{,}000$
(6) $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n}$	$\left(\frac{2}{5}\right)^3 = \frac{2^3}{5^3} = \frac{8}{125}$
(7) $x^0 = 1$	$3^0 = 1$
(8) $x^{-n} = \left(\frac{1}{x}\right)^n = \frac{1}{x^n}$	$3^{-2} = \left(\frac{1}{3}\right)^2 \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9}$
(9) $\left(\frac{x}{y}\right)^{-n} = \left(\frac{y}{x}\right)^n = \frac{y^n}{x^n}$	$\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{3^3}{2^3} = \frac{27}{8}$

Fuente: (Rivera, 2013)

Potenciación fraccionaria o radicación

La potencia fraccionaria o raíz enésima, se define como:

$$x^{1/n} = \sqrt[n]{x}$$

Generalizando:

$$x^{m/n} = \left(\sqrt[n]{x}\right)^m = \sqrt[n]{x^m}$$

Ejemplos:

Simplificar las siguientes expresiones:

(1) $27^{2/3} = \left(\sqrt[3]{27}\right)^2 = (3)^2 = 9$

(2) $16^{-3/4} = \dfrac{1}{16^{3/4}} = \dfrac{1}{\left(\sqrt[4]{16}\right)^3} = \dfrac{1}{2^3} = \dfrac{1}{8}$

(3) $\left(-\dfrac{27}{8}\right)^{-\frac{2}{3}} = \left(-\dfrac{8}{27}\right)^{\frac{2}{3}} = \left(\sqrt[3]{-\dfrac{8}{27}}\right)^2 = \left(-\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{4}{9}$

Propiedades adicionales:

Sea n un entero positivo mayor que 1, y x un número real.

1. Si $x = 0$, entonces $\sqrt[n]{x} = 0$
2. xi $x > 0$, entonces $\sqrt[n]{x}$ es un número real positivo, *y*, tal que $y^n = x$.
3. (a) Si $x < 0$ y n es impar, entonces $\sqrt[n]{x}$ es un número real negativo y, tal que $y^n = x$.

   (b) Si $x < 0$ y n es par, entonces $\sqrt[n]{x}$ no es un número real.

Para completar la terminología, la expresión $\sqrt[n]{x}$ es un radical, el número x es el radicando o la cantidad subradical y el número n es el índice o grado del radical. Al símbolo $\sqrt{\ }$ se le llama signo radical.

Obs.:

1.- En el caso de las fracciones con radicales, se resuelven de forma más sencilla cuando se racionaliza el denominador. Racionalizar el denominador significa eliminar todos los radicales del denominador, es decir, se multiplica tanto el numerador como el denominador de la fracción por la raíz n-ésima que se tiene en el denominador o por la raíz n-ésima de un número que haga que el denominador se transforme en una potencia entera.

2.- La operación inversa de la potenciación se llama radicación.

Propiedades de los radicales

Propiedades	Ejemplo
(1) $\sqrt[n]{xy} = \sqrt[n]{x}\sqrt[n]{y}$	$\sqrt{25\times 2} = \sqrt{25}\times\sqrt{2} = 5\sqrt{2}$
(2) $\sqrt[n]{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt[n]{x}}{\sqrt[n]{y}}$	$\sqrt[3]{\frac{5}{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{8}} = \frac{\sqrt[3]{5}}{2}$
(3) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{x}} = \sqrt[mxn]{x}$	$\sqrt{\sqrt[3]{64}} = \sqrt[2x3]{64} = \sqrt[6]{2^6} = 2$

Ejemplos:

Como $2^5 = 32$, entonces 2 es la raíz quinta de 32: $\sqrt[5]{32} = 2$

Como $24^2 = 576$, entonces 24 es la raíz cuadrada de 576: $\sqrt{576} = 24$

Simplificar: $\sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$

Simplifíquense y combínese radicales semejantes

$$\sqrt{\frac{2}{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{4x2}}$$
$$= \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}x\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}x\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{9}} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$
$$= \frac{\sqrt{6}}{3} + \frac{\sqrt{6}}{4}$$
$$= \frac{7\sqrt{6}}{12}$$

$$3\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = (3+5)\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{2}(\sqrt[4]{3}) + \frac{1}{3}\sqrt[4]{3}) = (\frac{1}{2} + \frac{1}{3})\sqrt[4]{3} = \frac{5}{6}\sqrt[4]{3}$$

$$\sqrt{5} - 6\sqrt{5} + 2\sqrt{5} = (1-6+2)\sqrt{2} = -3\sqrt{5}$$

$$-5(\sqrt[3]{7}) - 2\sqrt[3]{7} + 7\sqrt[3]{7} = (-5-2+7)\sqrt[3]{7} = 0\sqrt[3]{7} = 0$$

$$2\sqrt{2}\times 3\sqrt{5} = (2\times 3)\sqrt{2\times 5} = 6\sqrt{10}$$

$$\frac{15\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{15}{3}\sqrt{\frac{6}{3}} = 5\sqrt{2}$$

Racionalice el denominador de los siguientes números:

a) $\frac{2}{\sqrt{3}}$

Como $\sqrt{3}\sqrt{3} = (\sqrt{3})^2 = 3$, multiplicamos el numerador y el denominador por $\sqrt{3}$:

$$\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}}\right) = \frac{2\sqrt{3}}{(\sqrt{3})^2} = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

b) $\frac{3}{\sqrt{6}}$

$$\frac{3}{\sqrt{6}}\left(\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{6}}\right) = \frac{3\sqrt{6}}{(\sqrt{6})^2} = \frac{3\sqrt{6}}{6} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

c) $\frac{10}{\sqrt{8}}$

$$\frac{10}{\sqrt{8}} = \frac{10}{\sqrt{4\cdot 2}} = \frac{10}{\sqrt{4}\sqrt{2}} = \frac{10}{2\sqrt{2}} = \frac{5}{\sqrt{2}}\left(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

d) $\left(\sqrt[4]{(a-1)^3}\right)^3 = \left((a-1)^{3/4}\right)^3 = (a-1)^{9/4} = \sqrt[4]{(a-1)^9}$.

e) $\sqrt[3]{a-1}\cdot\sqrt[3]{a+1} = (a-1)^{1/3}\cdot(a+1)^{1/3} = ((a-1)\cdot(a+1))^{1/3} =$
$= (a^2-1)^{1/3} = \sqrt[3]{a^2-1}$

Definición: El conjugado de $c\sqrt{a}+d\sqrt{b}$ es $c\sqrt{a}-d\sqrt{b}$

Ejemplos:

Encuentre el conjugado de los siguientes números:

a) $1+\sqrt{2}$

El conjugado de $1+\sqrt{2}$ es $1-\sqrt{2}$.

b) $\sqrt{3}+\sqrt{5}$

El conjugado de $\sqrt{3}+\sqrt{5}$ es $\sqrt{3}-\sqrt{5}$

c) $3\sqrt{5}-2\sqrt{3}$

El conjugado de $3\sqrt{5}-2\sqrt{3}$ es $3\sqrt{5}+2\sqrt{3}$.

Racionalice el denominador de los siguientes números:

a) $$\frac{2}{1+\sqrt{3}}=\frac{2}{1+\sqrt{3}}\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1-\sqrt{3}}\right)=\frac{2(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})\cdot 1+(1+\sqrt{3})(-\sqrt{3})}=$$

$$=\frac{2(1-\sqrt{3})}{1+\sqrt{3}-\sqrt{3}-\left(\sqrt{3}\right)^2}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{1-3}=\frac{2(1-\sqrt{3})}{-2}=-(1-\sqrt{3})=\sqrt{3}-1$$

b) $$\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{\left(\sqrt{3}-\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=$$

$$\frac{\sqrt{2}\sqrt{3}+\left(\sqrt{2}\right)^2}{\sqrt{3}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)-\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+\sqrt{2}\right)}=\frac{\sqrt{6}+2}{\left(\sqrt{3}\right)^2+\sqrt{3}\sqrt{2}-\sqrt{2}\sqrt{3}-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$\frac{2+\sqrt{6}}{3+\sqrt{6}-\sqrt{6}-2}=\frac{2+\sqrt{6}}{3-2}=\frac{2+\sqrt{6}}{1}=2+\sqrt{6}$$

Puntos en la recta real

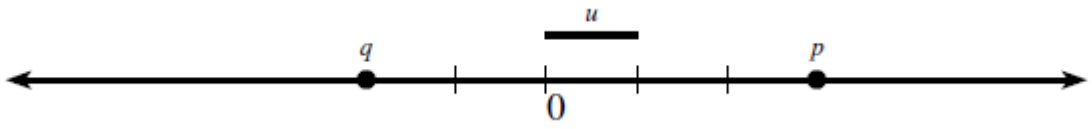
Según (Esteban_Duarte, s.f.), para marcar puntos sobre la recta real, se toma una longitud arbitraria como unidad. Así, el valor que acompaña al punto, indica el número de unidades a las que se encuentra dicho punto del origen 0 (cero).

Si es positivo, las unidades se cuentan a la derecha de 0 (cero) y si es negativo se cuentan a la izquierda de cero.

Si tomamos a la longitud del segmento como unidad (u), el punto p marcado con el número 3, indica que p está a 3 unidades a la derecha del origen (0).

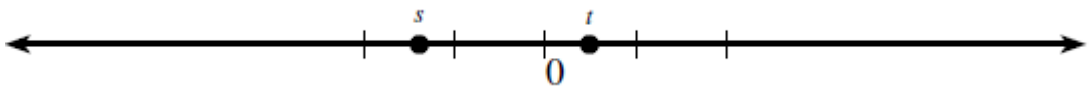
El punto q, marcado con el número −2, indica que q está a dos unidades a la izquierda del origen (0).

Como se muestra a continuación:



Para marcar décimas de unidad, se divide cada unidad en 10 partes y se marca el punto en la décima correspondiente.

El punto t = 0.5 se marca a 5 décimas a la derecha de 0. El punto s = −1.4 se marca a una unidad y 4 décimas a la izquierda de 0, como se muestra a continuación.



Intervalos

En la recta real se definen subconjuntos llamados intervalos; que pueden ser cerrados, abiertos, abiertos a la izquierda y cerrados a la derecha, cerrados a la izquierda y abiertos a la derecha o tiene el infinito en uno o en ambos extremos.

Los intervalos en la recta real se leen de izquierda a derecha. Por lo tanto, el número menor está a la izquierda y el mayor a la derecha.

Intervalo cerrado

El intervalo cerrado [a , b] = {x ∈ R / a ≤ x ≤ b}, se representa de la siguiente manera:



Los puntos rellenos indican, que tanto a como b y todos los números al interior del intervalo, resaltados con un segmento de línea más gruesa, son elementos del intervalo.

Ejemplo:

De esta forma, el intervalo A = [−2,3], se representa de la siguiente manera:



En el intervalo A, los extremos son elementos del mismo, es decir: −2 ∈ A y 3 ∈ A; además, todos los números reales que están entre estos dos extremos también pertenecen a A.

Por ejemplo: −0,99 ∈ A, −1,5 ∈ A, −√2 ∈ A, 0 ∈ A, 1,1 ∈ A, 1,3 ∈ A, √2 ∈ A, 2,9999 ∈ A

Intervalo abierto

El intervalo abierto (a , b) = {x ∈ R / a < x < b}, se representa como:



Los puntos sin llenar, significan que tanto a como b no pertenecen al intervalo. Por lo tanto, el intervalo está formado por todos los números reales del interior del intervalo; resaltados con un segmento de línea gruesa.

Ejemplo

De esta forma, el intervalo abierto B = (−2,3), se representa de la siguiente manera:



En el intervalo B, los extremos no son elementos del mismo, es decir: $-2 \notin B$ y $3 \notin B$; pero si pertenecen a B todos los números reales que están entre −2 y 3.

Intervalo cerrado a la izquierda, abierto a la derecha

El intervalo cerrado a la izquierda y abierto a la derecha $[a , b) = \{x \in R / a \leq x < b\}$, se representa como:



El punto a está relleno, significa que pertenece al intervalo, pero b, que no está relleno, no pertenece al intervalo. Por lo tanto, está conformado por todos los números al interior del intervalo, resaltados con un segmento de línea gruesa e incluido a que está en el extremo izquierdo.

Ejemplo:

El intervalo D = [−2,3), se representa gráficamente:



En el intervalo D, $-2 \in D$ y $3 \notin D$; pero sí todos los números reales que están entre los dos números.

Intervalo cerrado a la izquierda, infinito a la derecha

El intervalo cerrado a la izquierda, e infinito a la derecha; se define como:

$[a, \infty) = \{x \in R / a \leq x\}$, se representa como:



El punto a está relleno, significa que pertenece al intervalo. Todos los números que están a la derecha de a, forman parte del intervalo. Cuando un extremo es el ∞ (se lee infinito) se lo deja abierto y escribiendo el intervalo con un paréntesis.

Ejemplo

El intervalo $D = [-2, \infty)$, se representa de la siguiente manera:



Intervalo abierto a la izquierda, infinito a la derecha

El intervalo abierto $(a, \infty) = \{x \in R / a < x\}$, se representa como:



El punto a no está relleno, significa que no pertenece al intervalo. Todos los números que están a la derecha de a, forman parte del intervalo. Cuando un extremo es el ∞, se deja abierto, es decir, se escribe un paréntesis.

Ejemplo

De esta forma, el intervalo $E = (-2, \infty)$, se representa de la siguiente manera:



Al intervalo E, pertenecen todos los números que están a la derecha de −2, sin incluirlo.

Intervalo infinito a la izquierda, cerrado a la derecha

El intervalo infinito a la izquierda y cerrado a la derecha $(-\infty, b] = \{x \in R / x \leq b\}$, se representa como:



El punto relleno b, significa que pertenece al intervalo. Todos los números que están a la izquierda de b, forman parte del intervalo. Cuando un extremo es el $-\infty$, se deja abierto, es decir se escribe un paréntesis.

Ejemplo

De esta forma, el intervalo $F = (-\infty, 3]$, se representa de la siguiente manera:



Intervalo infinito a la izquierda, abierto a la derecha

El intervalo infinito a la izquierda y abierto a la derecha $(-\infty, b) = \{x \in R / x < b\}$, se representa como:



El punto sin rellenar b, significa que no pertenece al intervalo. Todos los números que están a la izquierda de b, forman parte del intervalo. Cuando un extremo es el $-\infty$, se deja bierto, es decir se escribe un paréntesis.

Ejemplo:

De esta forma, el intervalo $F = (-\infty, 3)$, se representa de la siguiente manera:



Tanto por ciento o porcentaje

Según (Rivera, 2013), el uso extendido de los decimales y sus operaciones se encuentran en el cálculo de porcentajes. Los porcentajes son fracciones con denominadores de 100 y se expresan con el símbolo %.

El cien por ciento (100%) se considera como un entero; por lo tanto, partes menores que el 100% son centésimos de la unidad.

El tanto por ciento, es un procedimiento de cálculo que compara diversas magnitudes al cien, es decir, el tanto por ciento consiste en determinar la cantidad que corresponde a otra dada, sabiendo la que corresponde a cien.

Definición de tanto por ciento

El tanto por ciento de una cantidad, o porcentaje; es una o varias de las cien partes iguales en que puede dividirse esa cantidad.

Transformación de un tanto por ciento a su forma decimal

Para transformar un tanto por ciento a la forma decimal, se elimina el signo % y dividimos por cien.

Ejemplos:

1. $7\% = \frac{7}{100} = 0.07$
2. $15\% = \frac{15}{100} = 0.15$
3. $132\% = \frac{132}{100} = 1.32$
4. $3.5\% = \frac{3.5}{100} = 0.035$
5. $7\ \frac{1}{2}\% = \frac{7\ \frac{1}{2}}{100} = 0.07$

Transformación de un decimal a tanto por ciento

Para transformar un decimal a tanto por ciento, multiplicamos el decimal por cien y le colocamos el signo de %.

Ejemplos:

1. $0.05 = 0.05 \times \frac{100}{100} = \frac{5}{100} = 5\ \%$
2. $0.007 = 0.007 \times \frac{100}{100} = \frac{0.7}{100} = 0.7\ \%$
3. $0.236 = 0.236 \times \frac{100}{100} = \frac{23.6}{100} = 23.6\ \%$

Transformación de una fracción común a porcentaje

Una fracción, se transforma a tanto por ciento, dividiendo el numerador entre el denominador y este cociente se multiplica por cien.

Ejemplos:

1. $\frac{5}{20} = 0.25 = 25\ \%$
2. $\frac{4}{7} = 0.57143 = 57.143\%$
3. $\frac{12}{5} = 2.4 = 240\ \%$
4. $\frac{3}{8} = 0.375 = 37.5\%$
5. $\frac{5}{6} = 0.833 = 83.3\%$

Transformación de un porcentaje a una fracción común

Para transformar un tanto por ciento, a una fracción común, se elimina el signo %, dividimos por cien y simplificamos.

Ejemplos:

1. $25\ \% = \frac{25}{100} \div \frac{5}{5} = \frac{5}{20}$
2. $75\ \% = \frac{75}{100} = \frac{9}{12}$
3. $240\ \% = \frac{240}{100} \div \frac{20}{20} = \frac{12}{5}$

Problemas de aplicación del tanto por ciento

El tanto por ciento se puede aplicar en problemas de ganancias y pérdidas, en comisiones, descuentos, intereses, etc.

Ejemplos:

1. Un señor tomó prestado $ 300.00 por un año, por los cuales debe pagar 8% al devolverlos. ¿Cuánto tuvo que pagar al final del año?

Solución:

Significado de 8%:

$\frac{8}{100}$ Significa que, en un año, la persona pagará $ 8.00 por cada $ 100.00 prestados. Si pidió $ 300.00 en un año tuvo que pagar de interés: $\frac{8}{100}x300 = \$\ 24{,}00$

Respuesta: Dinero que tuvo que pagar: $ 300.00 + $ 24.00 = $ 324.00

2. Si en un curso de matemática de 40 estudiantes el 12 ½ % reprobó, ¿Cuántos estudiantes aprobaron el curso?

Solución:

Cantidad de estudiantes que reprobaron: $12\ ½\ \% = \frac{12{,}5}{100}\text{x}40 = 5\ \text{estudiantes}$

Respuesta: Cantidad de estudiantes que aprobaron el curso: 40 – 5 = 35 estudiantes.

Valor absoluto

Según (Aufmann & Lockwood, 2013), el valor absoluto de un número positivo es el número mismo. El valor absoluto de cero es cero. El valor absoluto de un número negativo es el opuesto del número negativo.

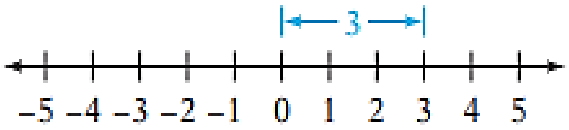
Definición matemática:

$$|\ x\ | = \begin{cases} 0;\ \text{si X es igual a 0: X=0} \\ X;\ \text{si X es positivo: X>0} \\ -X;\ \text{si X es negativo: X<0} \end{cases}$$

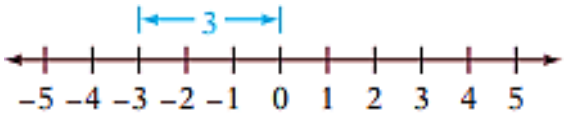
El valor absoluto de un número es su distancia desde cero en la recta numérica. Por consiguiente, el valor absoluto de un número es un número positivo o cero. El símbolo del valor absoluto es dos barras verticales **I I.**

Ejemplos:

1.- La distancia de 0 a 3 es 3. Por consiguiente, el valor absoluto de 3 es 3. I 3 I = 3



2.- La distancia de 0 a - 3 es 3. Por consiguiente, el valor absoluto de -3 es 3. I -3 I = 3



3.- I 6 I = 6 I 0 I = 0 I -6 I = 6 -I -10 I = -10

Propiedades del valor absoluto

$$|x| \geq 0$$

$$-|x| \leq x \leq |x|$$

$$a \geq 0 \Longrightarrow |x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$$

$$|x+y| \leq |x| + |y| \quad (desigualdad\ \ triangular)$$

$$|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$$

$$|-x| = |x|$$

$$|x-y| = |y-x|$$

$$|x|^2 = x^2$$

$$\sqrt{x^2} = |x|$$

$$|xy| = |x|\ |y|$$

$$\left|\frac{x}{y}\right| = \frac{|x|}{|y|} \quad si\ \ y \neq 0$$

CAPÍTULO CUATRO

FUNCIÓN LOGARÍTMICA Y EXPONENCIAL

Función exponencial

La función exponencial tiene aplicación, en casi todos los campos del conocimiento humano; particularmente es útil en el estudio de la química, la física, la biología y la ingeniería.

Definición de función exponencial, según (Sobisch, s.f.), (Anónimo, s.f.), (Jiménez _Nieto, s.f.):

Sea a un número real positivo y diferente de 1 ($a \in R^*_+ \; y \; a \neq 1$) definimos la función exponencial con base a a la función f: $R \rightarrow R^*_+$ definida por $f(x) = a^x$

En la definición dada, la base a se limita a los números positivos, así que a siempre será un número real positivo. Con esta restricción, una expresión como $(-4)^{\frac{1}{2}}$ no es posible. Cuando a =1, simplemente obtenemos la función constante $f(x) = 1^x = 1$.

Ejemplos de funciones exponenciales>

1.- $f(x) = 5^x$ la base es 5

2.- $f(x) = (0,4)^x$ la base es 0,4

3.- $f(x) = (\sqrt[3]{5})^x$ la base es $\sqrt[3]{5}$

Si la base a es 10, la misma se conoce como base decimal y la función $f(x) = 10^x$ se le conoce como función exponencial decimal, con referencia a la base 10.

En numerosas aplicaciones, la opción más adecuada es con base al número irracional, e = 2,718281828 …, conocido como número neperiano.

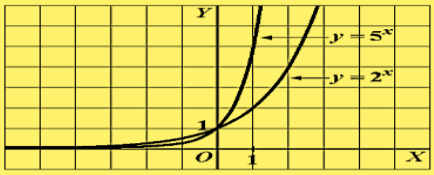
Cuando el número e, es usado como base de la potencia, la función dada por $f(x) = e^x$, recibe el nombre de función exponencial natural.

Se distinguen dos casos, cuando la base: $a > 1$ $0 < a < 1$

Funciones exponenciales, cuando la base a > 1

Hallar las potencias de 2 y 5 para representar las funciones $y = 2^x$, $y = 5^x$:

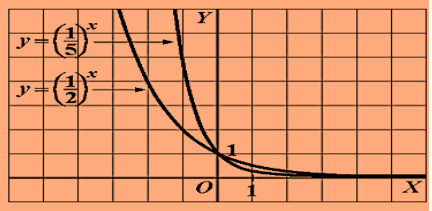
x	$y = 2^x$	$y = 5^x$
−4	0'0625	0'0016
−3	0'125	0'008
−2	0'25	0'04
−1	0'5	0'2
0	1	1
1	2	5
2	4	25
3	8	125
4	16	625



Funciones exponenciales, cuando la base 0 < a < 1

Del mismo modo podemos representar las funciones: $y = 2^{-x} = \frac{1}{2^x} = \left(\frac{1}{2}\right)^x$, $y = 5^{-x} = \frac{1}{5^x} = \left(\frac{1}{5}\right)^x$

x	$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$	$y = \left(\frac{1}{5}\right)^x$
−4	16	625
−3	8	125
−2	4	25
−1	2	5
0	1	1
1	0'5	0'2
2	0'25	0'04
3	0'125	0'008
4	0'0625	0'0016



En base de las figuras representadas, se deducen algunas propiedades de la función exponencial:

La ***función exponencial*** $y = a^x$ tiene las siguientes propiedades:

- Su **dominio** lo forman el conjunto de los números reales **R**.
- La **imagen** es el conjunto de los números reales positivos $\mathbf{R^+}$, es decir, el intervalo **(0, +∞).**
- Es **continua** en todo su dominio.
- Su gráfica corta al eje *Y* en el punto **(0, 1)** y pasa por el punto **(1, *a*),** pues $a^0 = 1$ y $a^1 = a$.

<u>Si la base $a > 1$:</u>

- Es **creciente** en todo su dominio.
- La función tiende a 0 cuando *x* tiende a −∞, por tanto, la recta $y = 0$ es una **asíntota horizontal.**
- La función tiende a +∞ cuando *x* tiende a +∞.

<u>Si la base $0 < a < 1$:</u>

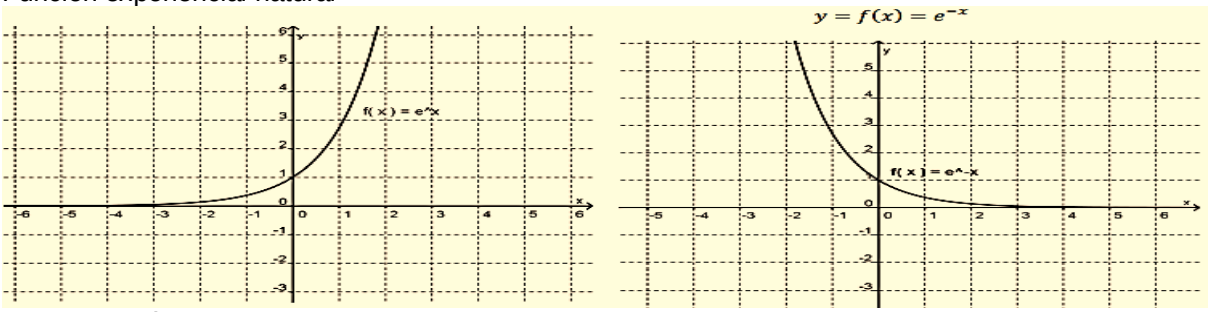
- Es **decreciente** en todo su dominio.
- La función tiende a 0 cuando *x* tiende a +∞, por tanto, la recta $y = 0$ es una **asíntota horizontal.**
- La función tiende a +∞ cuando *x* tiende a −∞.

Adicionalmente, se tiene que:

- El eje X es una asíntota horizontal para la gráfica de la función
- La función exponencial, es biyectiva

Una de las bases más importantes que se tiene es el número e; debido a su importancia muchas calculadoras con funciones científicas tienen una tecla e^x directamente en lugar de utilizar y^x para cualquier número real x. Las gráficas de $f(x) = e^x$, son similares a las que se muestran en la siguiente figura $y = f(x) = e^x$. Figura 4.

Figura 4
Función exponencial natural



Fuente: (Anónimo, s.f.)

Desplazamientos de la función exponencial

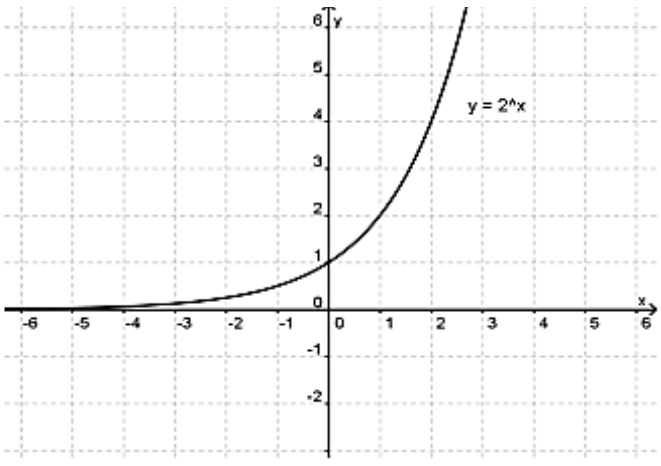
La función exponencial tiene la forma general $y = f(x) = P_0a^{bx+c}+d$, donde:

$a \neq 1, 0 < x \leq 1, a > 1$

Graficando la función exponencial cuando $P_0 = 1$, a = 2, b = 1, c = 0, d = 0.

Esto es, $y = f(x) = 2^x$.

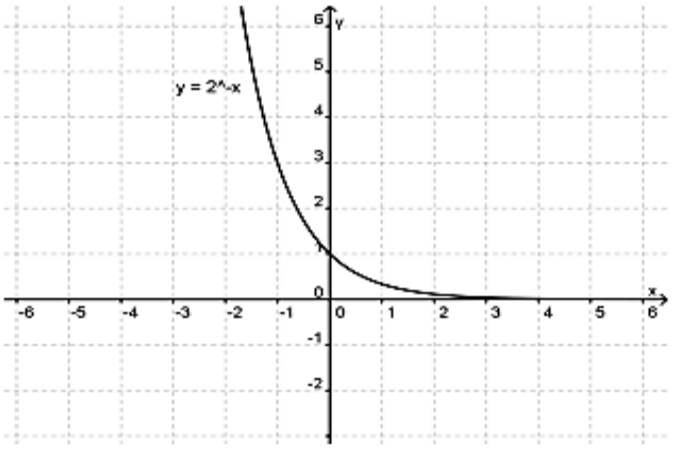
x	$f(x)$
-3	$\frac{1}{8}$
-2	$\frac{1}{4}$
-1	$\frac{1}{2}$
0	1
1	2
2	4
3	8



Graficando la función exponencial cuando $P_0 = 1$, a = 2, b = -1, c = 0, d = 0.

Esto es, $y = f(x) = 2^{-x}$.

x	$f(x)$
-3	8
-2	4
-1	2
0	1
1	$\frac{1}{2}$
2	$\frac{1}{4}$
3	$\frac{1}{8}$

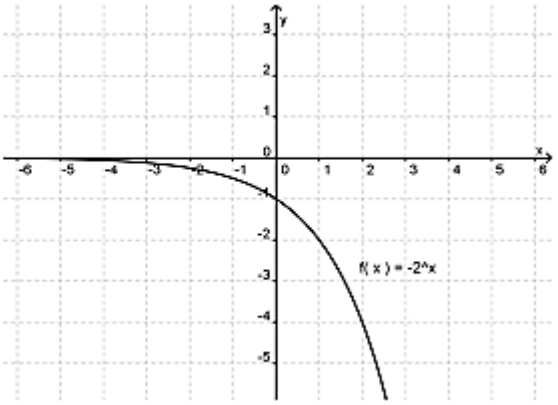


Observe que cuando ocurre esto, hay una reflexión de la gráfica sobre el eje Y.

Graficando la función exponencial cuando P0 = -1, a = 2, b = 1, c = 0, d = 0.

Esto es, $y = f(x) = -(2^x)$.

x	$f(x)$
-3	$-\frac{1}{8}$
-2	$-\frac{1}{4}$
-1	$-\frac{1}{2}$
0	-1
1	-2
2	-4
3	-8



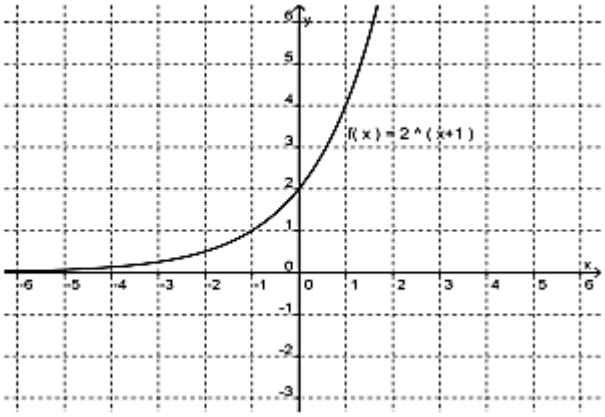
Ahora vemos que ocurre una reflexión, pero ahora sobre el eje “X“.

Sigamos jugando con la variación de los parámetros.

Graficando la función exponencial cuando $P_0 = 1$, a = 2, b = 1, c = 1, d = 0.

Esto es, $y = f(x) = 2^{x+1}$.

x	$f(x)$
-3	$\frac{1}{4}$
-2	$\frac{1}{2}$
-1	1
0	2
1	4
2	8
3	16



Obsérvese que la gráfica de y = f(x) = e^x, se traslada a la izquierda una unidad y tiene una asíntota horizontal en y = 0.

Ecuación exponencial

Según (Sobisch, s.f.), llamamos ecuación exponencial a toda ecuación que presenta la incógnita en el exponente.

Ejemplos de ecuaciones exponenciales:

$3^x = 1$ $5^{x-3} = 10.2^{x-1}$ $\pi^x = 3$

Resolver una ecuación exponencial significa encontrar el valor (o valores) de la incógnita que

haga la ecuación una sentencia numérica verdadera. Por ejemplo, en la ecuación $2^x = 32$, el valor $x = 5$ es una raíz, pues $2^5 = 32$.

Es posible transformar, a través de las propiedades, algunas ecuaciones en otras equivalentes que posean, en ambos miembros, potencias de la misma base, mayor que cero y distinto de 1.

Recordar que la función $y = a^x$ es inyectiva, obteniendo una ecuación que envuelve solamente los exponentes de los dos miembros.

Cuando no es posible obtener potencias de la misma base en los dos miembros, utilizaremos

otros métodos, por ejemplo, los logaritmos.

Ejemplos:

1.- Resolver la ecuación: $3^x = 9$

Solución:

$3^x = 9$

$3^x = 3^2$

X = 2 Propiedad biunívoca

El conjunto solución: S = {2}

2.- Resolver la ecuación: $\sqrt{3} = 27^x$

Solución:

$3^{1/2} = \sqrt[2]{3}$ $27 = 3^3$, se tiene:

$3^{1/2} = (3^3)^x$

$3^{1/2} = 3^{3x}$

$3x = ½ \rightarrow x = 1/6$

El conjunto solución: S = {1/6}

3.- Resolver la ecuación: $(\frac{2}{3})^{5x} = \left(\frac{27}{8}\right)$

Solución:

$$\left(\frac{27}{8}\right) = \frac{3^3}{2^3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)^{5x} = \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$$

Entonces: 5x = -3 x = -3/5

El conjunto solución: S = {-3/5}

4.- Resolver la ecuación: $2^x + 2^{x+1} = 24$

Solución:

$2^x + 2^x.2 = 24$

Sustituyendo: 2^x por y

y + 2y = 24

3y = 24 y = 8

$2^x = y = 8$ $2^x = 2^3$ $x = 3$

El conjunto solución: S = {3}

Función logarítmica

Según (Jiménez _Nieto, s.f.), (Vázquez, s.f.), (Sobisch, s.f.):

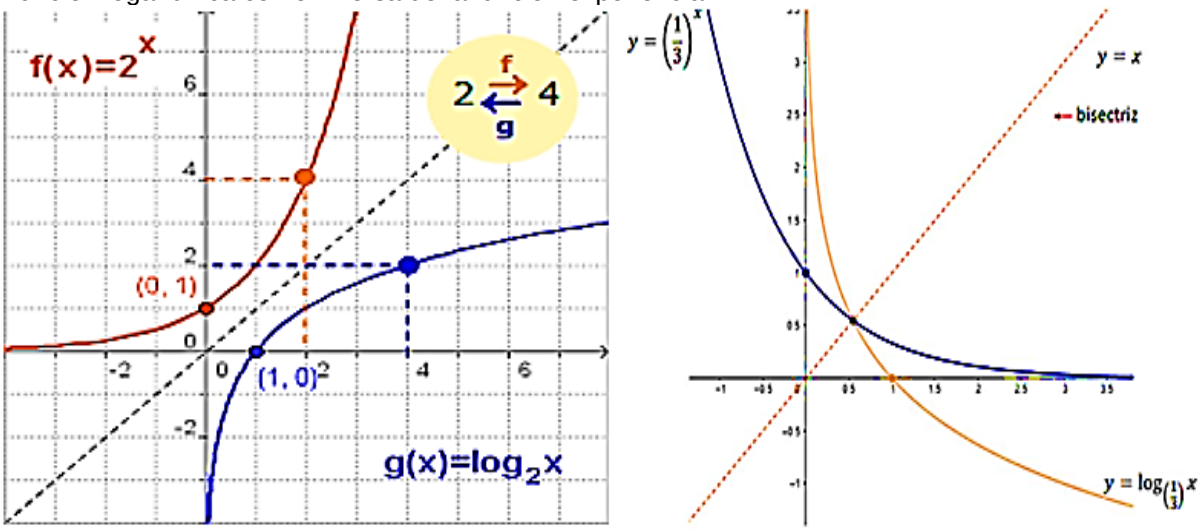
Sea una función inyectiva y=f(x), se llama función inversa de f a otra función g, tal que g(y)=x.

Para cada x, se obtiene a^x; al valor obtenido lo llamamos y o f(x). La función inversa de la exponencial es la que cumple que g(y)=x.

A esta función se llama función logarítmica, como se observa, es simétrica de la función exponencial con respecto a la bisectriz del primer y tercer cuadrantes.

En la Figura 5 adjunta, se puede ver la inversa de la función exponencial.

Figura 5
Función logarítmica como inversa de la función exponencial



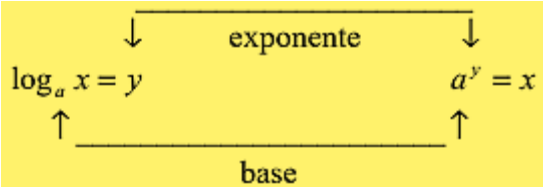
Definición de función logarítmica

Sea a un número real positivo diferente de 1. El exponente único y tal que $a^y = x$, se llama el logaritmo de x en base a (o con base a) y se denota por $log_a\, x = y$

De manera simbólica, la definición se la puede escribir así:

$log_a\, x = y$ sí y sólo si $a^y = x$, para todo x > 0, a > 0, a ≠ 1, y ∈ R.

Una interpretación tal vez más sencilla de logaritmo: Se llama logaritmo de un número, en una base dada, positiva y distinta de la unidad, al **exponente (y)** a que debe elevarse la base (a) para obtener dicho número (x).



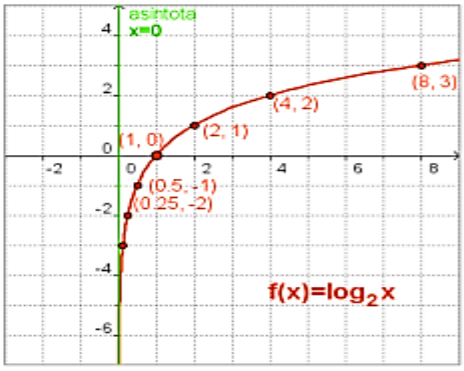
Las formas logarítmicas y exponenciales son ecuaciones equivalentes: si una es verdadera, también lo es, la otra. Por lo tanto, se puede pasar de una forma a la otra como se muestra en los siguientes ejemplos:

Forma logarítmica	Forma exponencial
$\log_{10} 100{,}000 = 5$	$10^5 = 100{,}000$
$\log_2 8 = 3$	$2^3 = 8$
$\log_2\left(\frac{1}{8}\right) = -3$	$2^{-3} = \frac{1}{8}$
$\log_5 s = r$	$5^r = s$

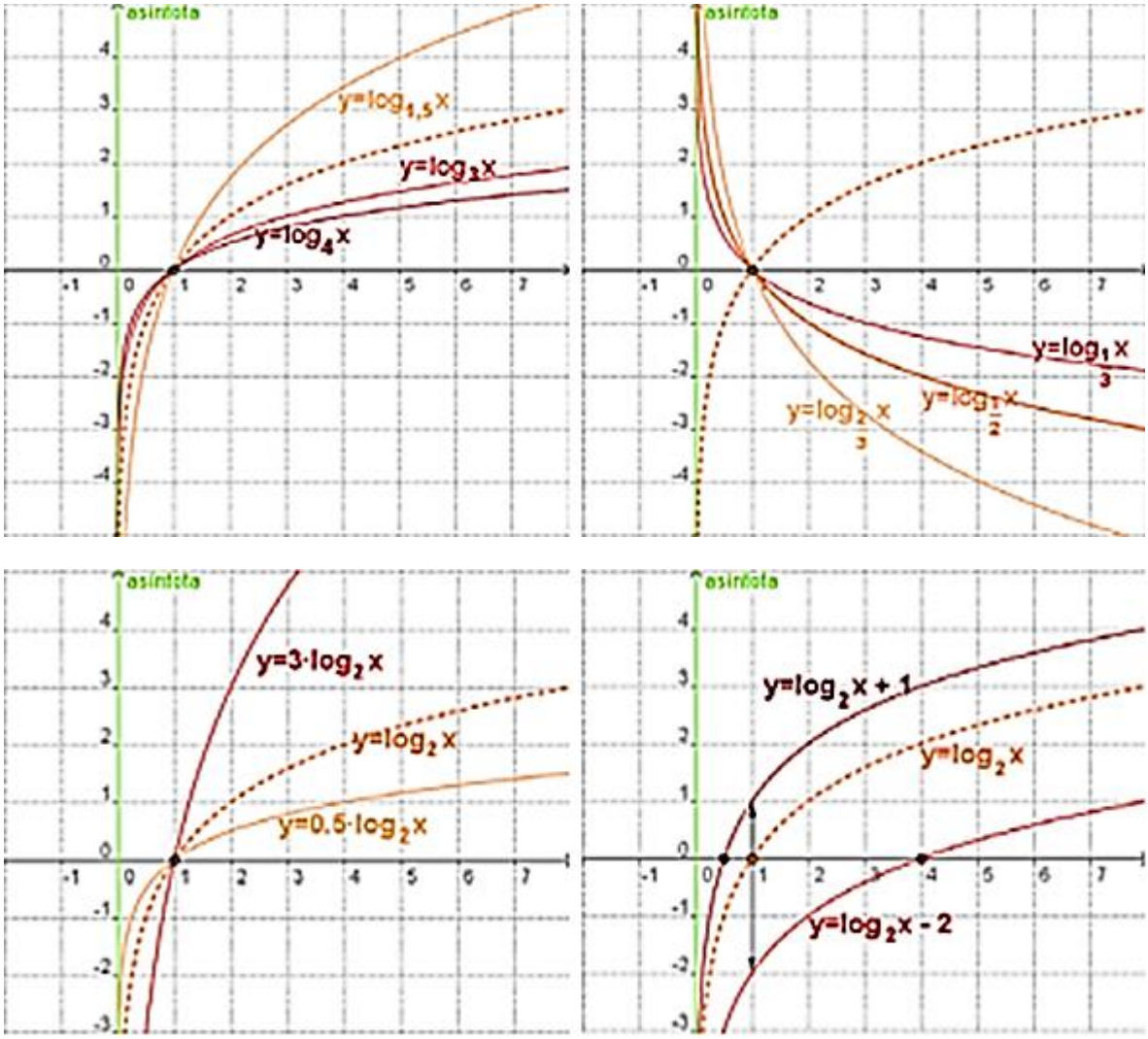
Características de la función logarítmica

En gráfica de $y = log_2 x$ de forma similar a como se hizo con la exponencial, se puede observar propiedades similares a la función exponencial, son simétricas.

x	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8
f(x)	-3	-2	-1	0	1	2	3



En las figuras a continuación, se puede ver cómo cambia la gráfica al variar a:



En las figuras de la derecha, se puede ver como al multiplicar por una constante $y = k.log_a\, x$ cambia la rapidez con que la función crece o decrece (k<0).

Al sumar (o restar) una constante b la gráfica se desplaza hacia arriba (o hacia abajo) b unidades, cambiando el punto de corte con el eje de abscisas.

Cambio de base

Cuando queremos calcular logaritmos en cualquier otra base tenemos que recurrir a la fórmula del cambio de base: $\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

Propiedades de los logaritmos

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS: PARTE I

Las siguientes propiedades vienen como consecuenia de que el logaritmo es un exponente.

Sea $a > 0, a \neq 1$.

I. $\log_a 1 = 0$ porque $a^0 = 1$

EJEMPLOS: 1) $\log_6 1 = 0$ 2) $\log_2 1 = 0$ 3) $\ln 1 = 0$

II. $\log_a a = 1$ porque $a^1 = a$

EJEMPLOS: 1) $\log_5 5 = 1$ 2) $\log 10 = 1$ 3) $\ln e = 1$

III. $\log_a a^x = x$ porque $a^x = a^x$

EJEMPLOS: 1) $\log_4 4^{10} = 10$ 2) $\log_2 \sqrt[3]{2} = \log_2 2^{\frac{1}{3}} = \frac{1}{3}$

IV. $a^{\log_a x} = x$, para $x > 0$

Razón: Esta propiedad se obtiene de la definición de logaritmo, la cual establece:
si $y = \log_a x$ entonces $a^y = x$ ó $a^{\log_a x} = x$.

EJEMPLOS: 1) $3^{\log_3 4} = 4$ 2) $5^{\log_5 \frac{3}{4}} = \frac{3}{4}$

PROPIEDADES DE LOS LOGARITMOS: PARTE II

Sean M, N y a números positivos con $a \neq 1$. Sea r cualquier número real.

I. $\log_a (MN) = \log_a M + \log_a N$

II. $\log_a \left(\frac{M}{N}\right) = \log_a M - \log_a N$

III. $\log_a M^r = r \log_a M$

IV. $\log_a M = \log_a N$ si y sólo si $M = N$

EJEMPLO: Escribe las siguientes expresiones como una suma y/o resta de logaritmos. Expresa las potencias como factores.

1) $\log_a x\sqrt[3]{x+5}$ 2) $\ln \frac{b^2}{(a+1)^3}$

SOLUCIÓN:

1) $\log_a x\sqrt[3]{x+5} = \log_a x + \log_a \sqrt[3]{x+5}$ **(Propiedad I)**

$= \log_a x + \log_a (x+5)^{\frac{1}{3}}$ (Se cambió la notación del radical por la notación exponencial.)

$= \log_a x + \frac{1}{3}\log_a (x+5)$ **(Propiedad III)**

2) $\ln \frac{b^2}{(a+1)^3} = \ln b^2 - \ln (a+1)^3$ **(Propiedad II)**

$= 2\ln b - 3\ln (a+1)$ **(Propiedad III)**

EJEMPLO: Halla el valor exacto de:

1) $\log_8 2 + \log_8 4$ 2) $e^{\ln 6 - \ln 9}$

SOLUCIÓN:

1) $\log_8 2 + \log_8 4 = \log_8 (2 \cdot 4) = \log_8 8 = 1$

Una suma de logaritmos que tienen la misma base es igual al logaritmo del producto de los números o expresiones a los cuales se les está hallando el logaritmo. O sea, tenemos el lado derecho de la **Propiedad I** y lo igualamos al lado izquierdo de dicha propiedad.

2) $e^{\ln 6 - \ln 9} = e^{\ln \frac{6}{9}} = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$ (Recuerda: $a^{\log_a x} = x$)

Una resta de dos logaritmos que tienen la misma base es igual al logaritmo de la división de los números o expresiones a los cuales se les está hallando el logaritmo. O sea, tenemos el lado derecho de la **Propiedad II** y lo igualamos al lado izquierdo de dicha propiedad.

Se distinguen dos casos en las funciones logarítmicas, cuando la base: a > 1 0 < a < 1

Funciones logarítmicas, cuando la base a > 1

A continuación, aparece una tabla de valores de la función $y = \log_2 x$

$$y = \log_2 x = \frac{\log x}{\log 2}$$

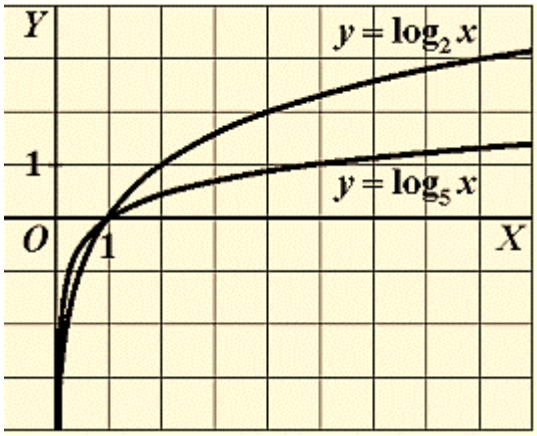
x	…	-1	0	2^{-6}	2^{-5}	2^{-4}	2^{-3}	2^{-2}	2^{-1}	1	2	2^2	2^3	2^4	2^5	2^6
$y = \log_2 x$	…	error	error	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

De forma análoga construimos una tabla de valores para la función logarítmica

$y = \log_5 x$

x	…	-1	0	5^{-6}	5^{-5}	5^{-4}	5^{-3}	5^{-2}	5^{-1}	1	5	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6
$y = \log_5 x$	…	error	error	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5	6

Representando gráficamente ambas funciones:

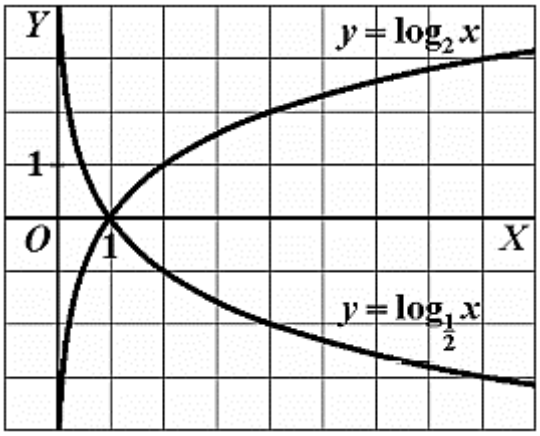


Funciones logarítmicas, cuando la base 0 < a < 1

Para estudiar la función $y = \log_{1/2} x$ basta tener en cuenta, aplicando las propiedades de los logaritmos, que:

$$y = \log_{\frac{1}{2}} x = \frac{\log x}{\log \frac{1}{2}} = \frac{\log x}{\log 1 - \log 2} = \frac{\log x}{0 - \log 2} = -\frac{\log x}{\log 2}$$

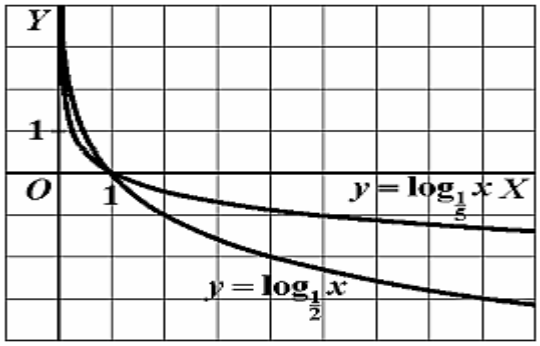
Por tanto, la función $y = \log_{1/2} x$ es opuesta a $y = \log_2 x$, y su gráfica la obtenemos por la simetría respecto del eje X:



La gráfica de la función $y = \log_{1/5} x$ es análoga a la de la función $y = \log_{1/2} x$:

x	…	−1	0	5^{-6}	5^{-5}	5^{-4}	5^{-3}	5^{-2}	5^{-1}	1	5	5^2	5^3	5^4	5^5	5^6
$y = \log_{\frac{1}{5}} x$	…	error	error	6	5	4	3	2	1	0	−1	−2	−3	−4	−5	−6

$y = \log_{\frac{1}{5}} x$ e $y = \log_{\frac{1}{2}} x$:



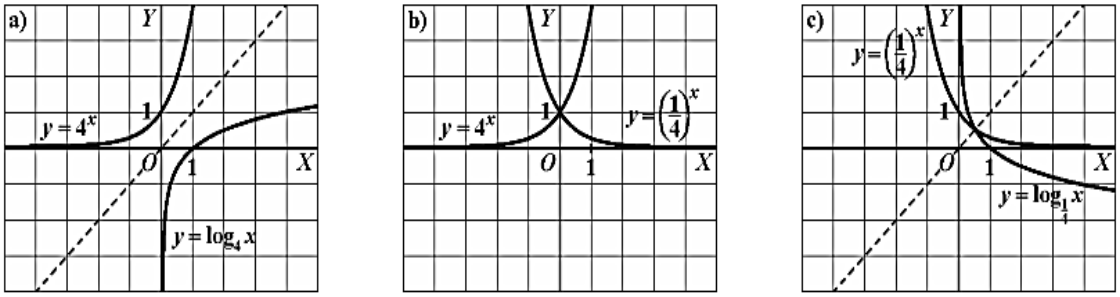
Otros ejemplos:

Representa la función $y = 4^x$, y a partir de su gráfica representa las gráficas de las funciones:

a) $y = \log_4 x$ b) $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ c) $y = \log_{\frac{1}{4}} x$

Construimos una tabla de valores para la función $y = 4^x$:

x	…	−3	−2	−1	0	1	2	3	…
$y = 4^x$	…	0'015625	0'0625	0'25	1	4	16	64	…

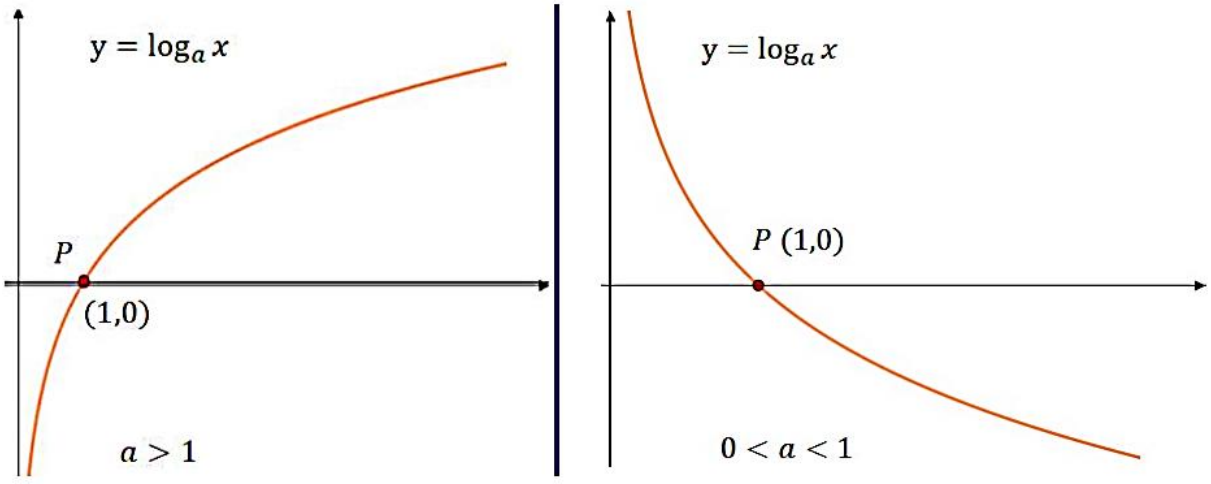


a) Representamos $y = 4^x$ a partir de la tabla de valores. La función $y = \log_4 x$ la obtenemos por simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

b) A partir de la gráfica de $y = 4^x$ obtenemos la de $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ por simetría respecto del eje de ordenadas.

c) La gráfica de $y = \log_{\frac{1}{4}} x$ la obtenemos a partir de $y = \left(\frac{1}{4}\right)^x$ por simetría respecto de la bisectriz del primer cuadrante.

También:



Observando las gráficas anteriores, deducimos las propiedades de estas funciones:

La ***función logarítmica*** $y = \log_a x$ tiene las siguientes propiedades:

- Su **dominio** es el conjunto de los números reales positivos $\mathbf{R^+ = (0, +\infty)}$.
- La **imagen** es todo el conjunto de los números reales **R**.
- Es **continua** en todo su dominio.
- Su gráfica corta al eje *X* en el punto **(1, 0)** y pasa por el punto **(*a*, 1)**, pues $\log_a 1 = 0$ y $\log_a a = 1$.

Si la base $a > 1$:

- Es **creciente** en todo su dominio.
- La función tiende a $+\infty$ cuando $x \to 0^+$, por tanto, la recta $x = 0$ es una **asíntota vertical.**
- La función tiende a $+\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.
- La función es **negativa** para valores de $x < 1$ y **positiva** para valores de $x > 1$.

Si la base $0 < a < 1$:

- Es **decreciente** en todo su dominio.
- La función tiende a $-\infty$ cuando $x \to 0^+$, por tanto, la recta $x = 0$ es una **asíntota vertical.**
- La función tiende a $-\infty$ cuando x tiende a $+\infty$.
- La función es **positiva** para valores de $x < 1$ y **negativa** para valores de $x > 1$.

Definición del logaritmo común

El logaritmo común es el que tiene base 10. Se define: log x = $\log_{10}$ x, para todo x > 0.

Ejemplos:

log 100 = $\log_{10} 100$ log 4 = $\log_{10} 4$

Los logaritmos de base 10, son los más usados y por este motivo no suele escribirse la base cuando se utilizan.

log 10 = log 10^1 =1

log 100 = log 10^2 =2

log 1000 = log 10^3 = 3

log 10000 = log 10^4 = 4, …, etc.

Entonces el log de un número de 2 cifras, comprendido entre 10 y 100, es 1,...; el log de los números de 3 cifras será 2,...; etc.

Por otra parte:

log 0,1 = log 10^{-1} = -1

log 0,01 = log 10^{-2} = -2

log 0,001 = log 10^{-3} = -3, …; etc.

Entonces el log de un número comprendido entre 0,01 y 0,1 será -1,...; el de uno comprendido entre 0,001 y 0,01 será -2,...; etc.

Propiedades de los logaritmos comunes

Propiedad	Razón
1. $\log_a 1 = 0$	Debemos elevar a a la potencia 0 para obtener 1.
2. $\log_a a = 1$	Debemos elevar a a la potencia 1 para obtener a.
3. $\log_a a^x = x$	Debemos elevar a a la potencia x para obtener a^x.
4. $a^{\log_a x} = x$	$\log_a x$ es la potencia a la que a debe elevarse para obtener x.

Definición del logaritmo natural o neperiano

El logaritmo natural es el que tiene base e. Se define: ln x = $\log_e$ x, para todo x > 0.

Ejemplos:

ln 3 = $\log_e 3$ ln 1 = $\log_e 1$

Propiedades de los logaritmos naturales

Propiedad.	Justificación.
a) $\ln 1 = 0$	Debemos elevar e a la potencia 0 para obtener 1.
b) $\ln e = 1$	Debemos elevar e a la potencia 1 para obtener e.
c) $\ln e^x = x$	Debemos elevar e a la potencia x para obtener e^x.
d) $e^{\ln x} = x$	$\ln x$ es la potencia a la cual debe elevarse e para obtener x.

Ejemplos de aplicación de propiedades:

Halla la función recíproca de $y = 3^{2x-1}$.

Para hallar la función inversa debemos despejar la variable x y después intercambiar ambas variables. Tomando logaritmos en ambos miembros obtenemos:

$$y = 3^{2x-1} \Leftrightarrow \log y = \log 3^{2x-1} \Leftrightarrow \log y = (2x-1)\cdot \log 3 \Leftrightarrow 2x-1 = \frac{\log y}{\log 3} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x-1 = \log_3 y \Leftrightarrow 2x = \log_3 y + 1 \Leftrightarrow x = \frac{\log_3 y + 1}{2}$$

La función recíproca de $y = 3^{2x-1}$ es, por tanto, $y = \frac{\log_3 x + 1}{2}$.

Calcula x en cada caso aplicando la definición de logaritmo:

a) $\log_6(1/6)=x$	x=-1	$6^{-1}=1/6$
b) $\log_4 2=x$	x=1/2	$4^{1/2}=2$
d) $\log_5 125=x$	x=3	$5^3=125$
f) $\log_{1/8} 1=x$	x=0	$(1/8)^0=1$
c) $\log_3 81=x$	x=4	$3^4=81$
g) $\log_{1/5} 25=x$	x=-2	$(1/5)^{-2}=25$
d) $\log_3(1/9)=x$	x=-2	$3^{-2}=1/9$
h) $\log_{1/2}(1/16)=x$	x=4	$(1/2)^4=1/16$

Sabiendo que log2=0,301030 calcula sin ayuda de la calculadora:

a) log40 $= \log(4\cdot 10) = \log(2^2\cdot 10) = \log 2^2 + \log 10 = 2\cdot\log 2 + \log 10 =$
$= 2\cdot 0{,}301030 + 1 = 1{,}602060$

b) log1,6 $= \log(16/10) = \log(2^4/10) = \log 2^4 - \log 10 = 4\log 2 - \log 10 =$
$= 4\cdot 0{,}301030 - 1 = 0{,}204120$

c) log 0,125 $= \log(125/1000) = \log 53/1000) = 3(\log 5 - \log 1000 = 3\log(10/2) - 3 =$
$= 3(\log 10 - \log 2) - 3 = 3 - 3\log 2 - 3 = -3\cdot 0{,}301030 = -0{,}903090$

Con la calculadora halla los siguientes logaritmos:

a) $\log_2 23{,}721 = \frac{\log 23{,}721}{\log 2} = 4{,}5681$

b) $\log_3 25678{,}34561 = \frac{\log 2{,}3456}{\log 3} = 0{,}7760$

c) $\log_5 0{,}37906 = \frac{\log 0{,}37906}{\log 5} = -0{,}6027$

d) $\log_7 0{,}37906 = \frac{\log 0{,}37906}{\log 7} = -0{,}4985$

RECUERDA:

$\log_a b = \frac{\log b}{\log a}$

Use las leyes de los logaritmos para reescribir cada expresión:

$$\log\sqrt{\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}} = \log\left(\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}\right)^{\frac{1}{2}} \text{---------- } \sqrt{c} = c^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}\log\left(\frac{x^2+4}{(x^2+1)(x^3-7)^2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}((\log(x^2+4) - \log(x^2+1)(x^3-7)^2))$$

$$= \frac{1}{2}(\log(x^2+4) - (\log(x^2+1) + \log(x^3-7)^2)$$

$$= \frac{1}{2}(\log(x^2+4) - \log(x^2+1) - \log(x^3-7)^2)$$

$$= \frac{1}{2}(\log(x^2+4) - (\log(x^2+1) - 2\log(x^3-7))$$

$$= \frac{1}{2}\log(x^2+4) - \frac{1}{2}\log(x^2+1) - \log(x^3-7)$$

$$\ln\left(\frac{z^4\sqrt{x}}{\sqrt[3]{y^2+6y+17}}\right) = \ln\left[\frac{z^4x^{\frac{1}{2}}}{(y^2+6y+17)^{\frac{1}{3}}}\right] \text{---------- } \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$= \ln z^4x^{\frac{1}{2}} - \ln(y^2+6y+17)^{\frac{1}{3}}$$

$$= \ln z^4 + \ln x^{\frac{1}{2}} - \ln(y^2+6y+17)^{\frac{1}{3}}$$

$$= 4\ln z + \frac{1}{2}\ln x - \frac{1}{3}\ln(y^2+6y+17)$$

Ecuaciones logarítmicas

Una ecuación logarítmica es aquella en la cual está presente la variable logaritmo.

$\log_2(x+2) = 5$

Para despejar x escribimos la ecuación en forma exponencial.

$x + 2 = 2^5$ -------forma exponencial.

$x = 2^5 - 2$ ------restamos 2 a ambos miembros de la ecuación.

$x = 32 - 2$ ---------- desarrollamos 2^5.

$x = 30$ ---------- despejamos x.

Forma alternativa de solución. $\log_2(x+2)=5$

$2^{\log_2(x+2)}=2^5$---------- eleve 2 tomando como exponente cada lado.

$x+2=2^5$ ---------- $a^{\log_a x}$

$x=2^5-2$ ------- restamos 2 a ambos miembros de la ecuación.

$x=32-2$ ---------- desarrollando la potencia de 2.

$x=30$ --------- despejamos x.

Resuelva la ecuación $\log_3 x-\log_3 4=\log_3 12$

Solución.

$\log_3 x-\log_3 4=\log_3 12$

$\log_3 x=\log_3 12+\log_3 4$ ----- sumando en cada lado $\log_3 4$.

$\log_3 x=\log_3(12)(4)$

$\log_3 x=\log_3 48$ ---------- producto $(12)(4)$.

$3^{\log_3 x}=3^{\log_3 48}$ ---------- eleve 3 tomando como exponente cada lado.

$x=48$ -------- $a^{\log_a x}$.

Resuelva la ecuación $4+3\log 2x=16$

Solución.

$4+3\log 2x=16$

$3\log 2x=16-4$ -------- restando 4 a ambos miembros de la ecuación.

$3\log 2x=12$

$\log 2x=\frac{12}{3}$ --------- dividiendo por 3 ambos miembros de la ecuación.

$\log 2x=4$

$10^{\log 2x}=10^4$ -------- eleve 10 tomando como exponente cada lado.

$2x=10000$ ---------- $a^{\log_a x}=x$.

$x=\frac{10000}{2}$ ------- divida por 2 ambos miembros de la ecuación.

$x=5000$ -------- despeje x.

$$3^{x+2} = 7$$

$\log(3^{x+2}) = \log 7$---------- tomando el logaritmo de ambos lados de la ecuación.

$(x+2)\log 3 = \log 7$---------- ley 3

$x + 2 = \frac{\log 7}{\log 3}$---------- divida por logaritmo de 3.

$x = \frac{\log 7}{\log 3} - 2$ ---------- reste 2 de ambos lados.

$x = -0.228756$------- use una calculadora..

Encontrar el valor de N sabiendo que $\log_2 N = \log_5 3$.

Solución

$\log_2 N = \frac{\log_5 N}{\log_5 2} = \log_5 3$ **(1)**

$\underset{de\ (1)}{\Longrightarrow} \frac{\log_5 N}{\log_5 2} = \log_5 3 \underset{(2)}{\Rightarrow} \log_5 N = \log_5 2 \cdot \log_5 3 \underset{(3)}{\Rightarrow} \log_5 N = \log_5 3^{\log_5 2} \underset{(4)}{\Rightarrow} N = 3^{\log_5 2}$

(1) Expresamos el primer miembro, donde está la incógnita N, en base 5, la base en la cual está el dato

(2) Multiplicamos ambos miembros por $\log_5 2$

(3) Ley del logaritmo de una potencia

(4) Despejamos N usando la definición de logaritmos $5^{\log_5 N} = 5^{\log_5 3^{\log_5 2}}$

CAPÍTULO QUINTO

ECUACIONES E INECUACIONES LINEALES DE 2X2

Ecuaciones lineales

La recta

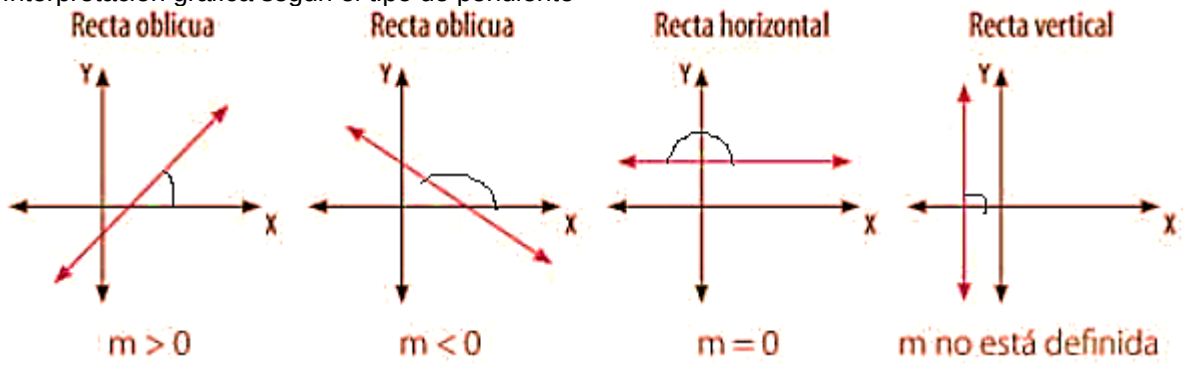
Según (Anónimo, La Recta, s.f.), una recta es una función de la forma y = mx + n o f(x) = mx + n, siendo m, n ∈ R; donde: m es la pendiente de la recta y n es la ordenada en el origen, es decir nos indica el punto de corte con el eje Y: (0, n)

Al valor de n, también se le conoce como coeficiente de posición.

De acuerdo al signo de la pendiente (Figura **6**) m:

$$\begin{cases} \text{si } m > 0 & \text{la recta es creciente} \\ \text{si } m < 0 & \text{la recta es decreciente} \\ \text{si } m = 0 & \text{la recta es constante y la gráfica es paralela al eje X} \end{cases}$$

Figura 6
Interpretación gráfica según el tipo de pendiente

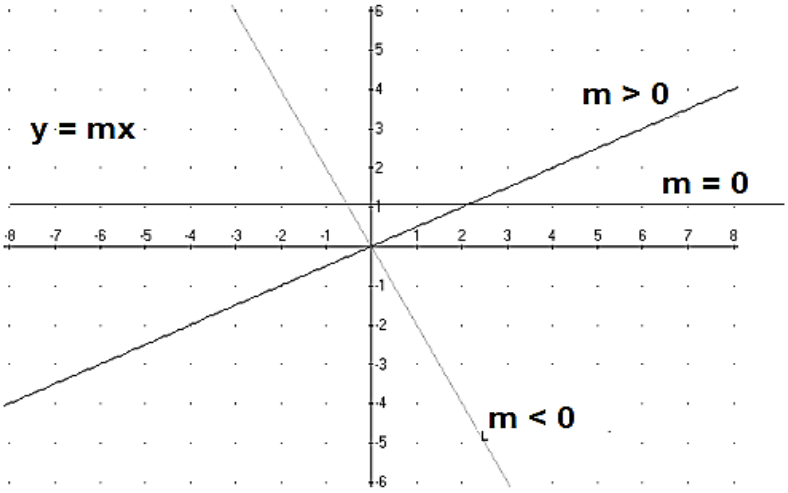


También hay que indicar que la pendiente $m = \tan(\alpha)$; α es el ángulo de inclinación que existe entre el eje X y la gráfica de la recta, así se tienen las siguientes consecuencias de la interpretación Figura **6**:

Si m > 0:	$0^0 < \alpha < 90^0$	α: Ángulo agudo
Si m < 0:	$90^0 < \alpha < 180^0$	α: Ángulo obtuso
Si m = 0:	$\alpha = 0^0$ o $\alpha = 180^0$	α: Ángulo llano o plano
Nota: Si x = c, c ∈ R; $m = \tan(90) = \infty$,		$\alpha = 90^0$ Ángulo recto

Observaciones para la Figura 7:

Figura 7
Pendiente de la recta



1.- Si n=0 la recta es de la forma y = mx, se le conoce como función lineal y pasa por el origen de coordenadas.

2.- Si n≠0 la recta es de la forma y = mx + n, se le conoce como función afín.

3.- Dos rectas son paralelas, si tienen la misma pendiente y distinta ordenada en el origen.

4.- Dos rectas son secantes si tienen distinta pendiente. Y para determinar el punto donde se cortan se resuelve el sistema de ambas rectas.

Ejemplos:

1.- Representar gráficamente la función f(x) = -2x + 4

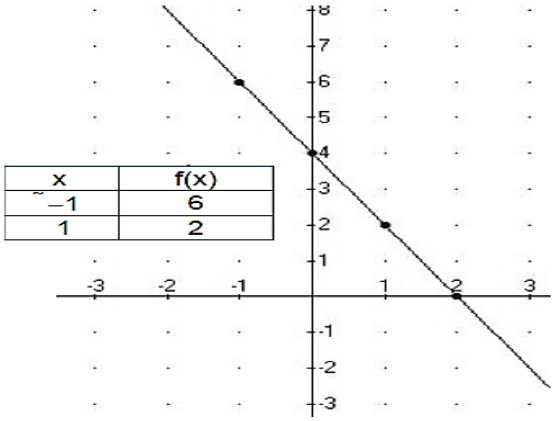
- Para dibujar una recta f(x) = mx + n, se necesita estudiar la pendiente m, que nos dirá si es creciente o decreciente la función.
- Determinar el punto de corte con el eje de ordenadas que es (0, n)
- Determinar dos puntos de la función.
- Determinar el punto de corte con el eje de abscisas, f(x) = 0. Para lo cual, se resuelve la ecuación mx + n = 0

Solución:

La pendiente de la recta es m = −2, por tanto, la función es decreciente.

La ordenada en el origen es n = 4, por tanto, la función corta al eje de ordenadas en el punto (0,4).

Determinamos dos puntos de la recta:



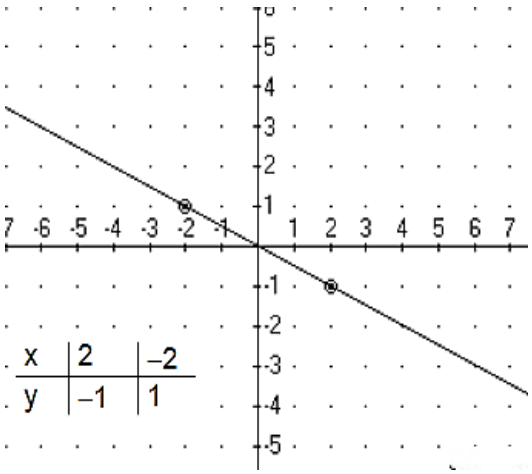
El punto de corte con el eje de abscisas es: f(x) = 0, -2x + 4 = 0, x = 2 es decir, el punto (2, 0).

2.- Dada la ecuación $y = \frac{-1}{2}x$, realizar el estudio respectivo de la recta.

Solución:

Es una función lineal, con la pendiente negativa m = $\frac{-1}{2}$. Entonces la recta pasa por el origen de coordenadas, es decreciente y pasa por el segundo y cuarto cuadrante.

Para graficar la función, hacemos una tabla de valores:



3.- Calcula el valor de a para que la recta $y = ax + (2a + 3)$ sea paralela a la recta y = 2x + 5. ¿Qué distancia vertical hay entre ambas rectas?

Solución:

Para que dos rectas sean paralelas tienen que tener la misma pendiente.

$$\left.\begin{array}{l}\text{La pendiente de la primera recta es : } m = a \\ \text{La pendiente de la segunda és : } m = 2\end{array}\right\} \text{si igualamos } a = 2.$$

Substituimos a por 2: $y = 2x + 4 + 3 \Rightarrow y = 2x + 7$

Ya tenemos las dos rectas: $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = 2x + 7 \end{cases}$. La primera corta al eje Y en (0, 5) y la segunda en (0, 7). La distancia vertical entre ambas es $7 - 5 = 2$.

Ecuación general de la recta

La ecuación general de la recta es de la forma $Ax + By + C = 0$, donde $A, B, C \in R$.

De la ecuación general se puede determinar su ecuación principal.

$$Ax + By + C = 0$$

$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}, \text{ B} \neq 0$$

Por lo tanto, en la recta cuya ecuación general es $Ax\ By\ C = 0$, donde A, B y $C \in R$ y $B \neq 0$, su pendiente es $-\frac{A}{B}$ y su coeficiente de posición es $-\frac{C}{B}$.

Despeje de variables

Para el despeje de variables debemos tener en cuenta algunos aspectos:

Obsérvese que la ecuación: $Ax + By + C = 0$, está formada por:



- Al Miembro 1, se le conoce también como lado izquierdo de la expresión algebraica o ecuación.
- Al Miembro 2, se le conoce también como lado derecho de la expresión algebraica o ecuación. El Miembro 2, podría estar formado por términos similares a los del Miembro 1.
- Ax, By, C, incluido el número 0; son los términos de la ecuación
- A, B, C, {0} ∈ R

- Entre A y la variable x, existe un signo aritmético, aunque no se lo pinte o escriba, es la multiplicación; lo mismo entre B y la variable y.
- A la variable x, de hoy en adelante se le denomina variable independiente; es decir es la variable que puede asumir o tomar cualquier valor ∈ R. Al conjunto de valores que asumirá la variable x, se le denomina Dominio o Conjunto de salida.
- A la variable y, de hoy en adelante se le denomina variable dependiente; es decir es la variable que puede asumir o tomar cualquier valor ∈ R, pero en dependencia o función de la variable independiente. Al conjunto de valores que asumirá la variable y, se le denomina Rango o Conjunto de llegada.

Considerando lo indicado, para el despeje de cualquiera de las variables se aplicarán las siguientes reglas (Lexus_Editores, 2008):

Regla 1.- Si a ambos miembros de una ecuación, se suma o resta una misma expresión o un mismo número, resulta una ecuación equivalente a la primera.

Ejemplo:

Sea la ecuación A = B donde A y B son el primer y segundo miembro y m una cantidad cualesquiera, entonces: $A \pm m = B \pm m$

Regla 2.- Si a ambos miembros de una ecuación, se multiplica o divide por un mismo número o por una misma expresión independiente de x ($m \neq 0$, $m \neq \infty$) se obtiene una ecuación que es equivalente a la primera.

Ejemplo:

Sea la ecuación: A = B. Multiplicando por $m \neq 0$, $m \neq \infty$; se tiene: $A \cdot m = B \cdot m$

dividiendo entre $m \neq 0$, $m \neq \infty$; se tiene: $\frac{A}{m} = \frac{B}{m}$

Regla 3.- Si a ambos miembros de una ecuación, se eleva a una misma potencia o se extrae una misma raíz, la ecuación que resulta es parcialmente equivalente a la primera.

Ejemplo:

Sea la ecuación: $A = B$ o: $A - B = 0$

Elevando los dos miembros a la m: $A^m = B^m$ o: $A^m – B^m = 0$

factorizando por cocientes notables:

$A^m – B^m = (A - B)(A^{m-1} + A^{m-2} B + A^{m-3}B^2 + \ldots + B^{m-1}) = 0$

de donde, se obtiene: $A - B = 0$ $A = B$

y: $A^{m-1} + A^{m-2} B + A^{m-3}B^2 + \ldots + B^{m-1} = 0$

Ecuación donde podrían aparecer soluciones extrañas: Se denomina soluciones extrañas, a aquellas que se introducen o se pierden en una ecuación al realizar ciertas operaciones.

En forma análoga, se obtiene para la raíz.

Ejemplos:

1.- Resolver:

$$x - 4 = \sqrt{x^2 - 8}$$

$$(x - 4)^2 = \left(\sqrt{x^2 - 8}\right)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 8$$

$$24 = 8x$$

$$x = 3$$

2.- Resolver

$$2\sqrt{(x - a)^2} = \sqrt{x - a}\ \sqrt{x - b}$$

$$2\sqrt{(x - a)^2} = \sqrt{x - a}\ \sqrt{x - b} \quad \text{dividiendo por } \sqrt{x - a}:$$

$$2\sqrt{x - a} = \sqrt{x - b} \qquad (I)$$

Observese que se ha eliminado la solución: $x - a = 0$, $x = a$

Elevando al cuadrado (I):

$$4(x - a) = x - b$$

$$\therefore \quad x = \frac{4a - b}{3}$$

Sistemas de ecuaciones lineales de 2 x 2

Según (UTN, s.f.), un sistema de ecuaciones, es un conjunto de ecuaciones con las mismas incógnitas o variables. Resolver un sistema, significa hallar todas las soluciones del sistema, es decir, todos los valores posibles para las variables que hacen verdadera cada una de las ecuaciones.

Particularmente, veremos tres métodos para resolver un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2, \end{cases}$$

Donde:

$a_1, a_2, b_1, b_2, c_1, c_2 \in R$

x e y son las variables dependiente e independiente respectivamente.

Lo que se requiere es, que ambas ecuaciones se cumplan a la vez, es decir, una solución al sistema; que son valores para x e y, que hacen validas a ambas igualdades simultaneamente.

Ejemplo:

Comprobando si es solución del sistema. x = 3 e y = 1 es una solución del sistema:

2x − y = 5

3x + 2y = 11

Pues:

$2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$ $\quad$ $3 \cdot 3 + 2 \cdot 1 = 9 + 2 = 11$

La solución en el ejemplo, también se puede escribir como par ordenado (3, 1).

A un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, se les nombra de acuerdo a la cantidad de soluciones que posean:

a) Compatibles. - Son aquellas que admiten solución y pueden ser, a su vez:

- Determinadas: Si admiten un número limitado de soluciones.
- Indeterminadas: Si admiten un número ilimitado de soluciones.

b) Incompatibles o absurdas. - Son aquellas que no admiten solución.

Las soluciones al sistema, serán las soluciones comunes a la ecuación lineal con dos incógnitas de la ecuación primera (S_1) y las soluciones de la segunda ecuación (S_2). De esta forma si llamamos S a las soluciones del sistema, estas serán igual a: $S=S_1 \cap S_2$

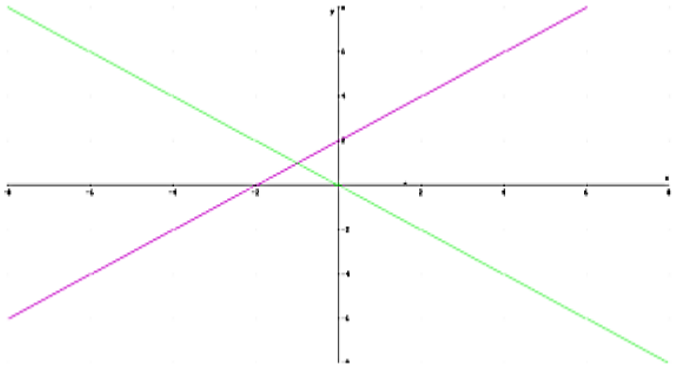
1. Compatible determinado, una única solución.

Ocurre cuando tienen una única solución. Gráficamente, ocurre cuando las dos rectas se cortan en un único punto, que será la solución a las dos ecuaciones. Ocurre si la relación entre los coeficientes:

$$\frac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{a_2}} \neq \frac{\boldsymbol{b_1}}{\boldsymbol{b_2}}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\quad x+y=0\\(2)\quad -x+y=2\end{array}\right\} \frac{1}{-1}\neq\frac{1}{1}$$



2. Sistema compatible indeterminado, infinitas soluciones

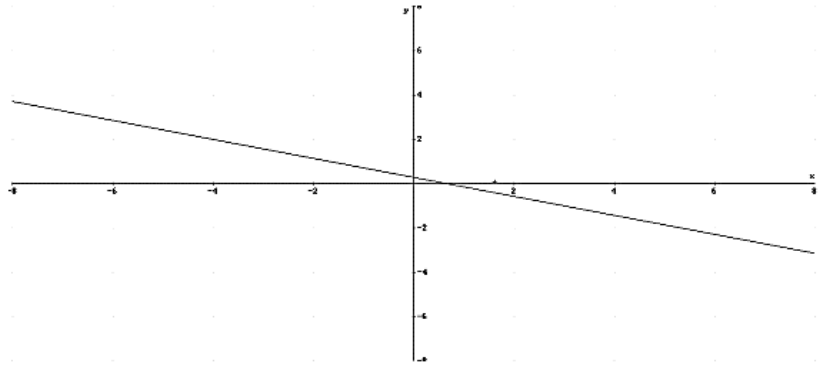
Ocurre cuando la ecuación (1) es equivalente a la (2), se cumple entonces:

$$\frac{\boldsymbol{a_1}}{\boldsymbol{a_2}} = \frac{\boldsymbol{b_1}}{\boldsymbol{b_2}} = \frac{\boldsymbol{c_1}}{\boldsymbol{c_2}}$$

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\quad 3x+7y=2\\(2)\quad -6x-14y=-4\end{array}\right\} (2)\equiv(1)\rightarrow \frac{3}{-6}=\frac{7}{-14}=\frac{2}{-4}$$

Si representamos las dos ecuaciones, se trata de dos rectas iguales, por tanto, las soluciones son todos los puntos situados en la recta que viene determinada por la ecuación (1) o (2).



3. Sistema incompatible, no tiene soluciones

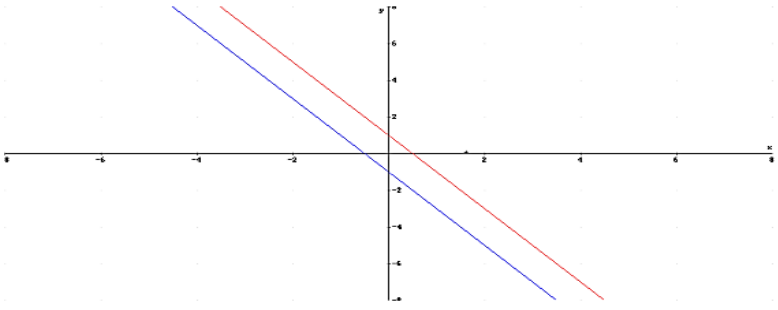
Ocurre cuando las dos ecuaciones son incompatibles, es decir, no tienen ninguna solución en común. La relación entre sus coeficientes son los siguientes:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$$

No tiene soluciones, al tratarse de dos rectas paralelas.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\quad 2x+y=1\\(2)\ 4x+2y=-2\end{array}\right\} \rightarrow \frac{2}{4}=\frac{1}{2}\neq\frac{1}{-2}.$$



Métodos de resolución de sistemas de ecuaciones lineales 2x2

La resolución analítica de este tipo de sistemas es bastante sencilla, pues consiste esencialmente en transformar el sistema, en una ecuación lineal de una sola incógnita o variable, resolverla y hallar con la solución obtenida, el valor de la variable restante.

Veremos la resolución, por tres métodos más utilizados o conocidos, que describiremos a continuación:

Igualación

Se despeja la misma variable, de ambas ecuaciones y luego se igualan. Se obtiene una ecuación lineal en la otra variable, cuya solución se evalúa en cualquier ecuación, para obtener la solución del sistema.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x - 4y &= -6 \\ -x + 5y &= 13 \end{cases}$$

Solución: Por el aspecto de ambas ecuaciones, parece conveniente despejar x de ambas para obtener

$$\begin{cases} x &= \frac{-6+4y}{3} \\ x &= 5y - 13. \end{cases}$$

Igualamos entonces las dos expresiones obtenidas para x, y luego resolvemos:

$$\begin{aligned} \frac{-6+4y}{3} = 5y - 13 &\iff -6 + 4y = 3(5y - 13) \\ &\iff -6 + 4y = 15y - 39 \\ &\iff 33 = 11y \\ &\iff y = 3. \end{aligned}$$

Teniendo el valor para y, podemos obtener el de x reemplazando en cualquiera de las dos expresiones para ella en función de y:

$$x = 5 \cdot 3 - 13 = 15 - 13 = 2.$$

Por lo tanto, luego de realizar la verificación, se concluye que la solución al sistema es $x = 2$ e $y = 3$, por lo que el mismo es compatible determinado.

Reducción o por suma o resta

Se reduce una de las variables, al multiplicar una o ambas ecuaciones por un término adecuado, para luego sumarlas entre sí. Se obtiene una ecuación lineal en la variable no reducida, cuya solución se evalúa en cualquier ecuación, para obtener la solución del sistema.

Ejemplo:

$$\left.\begin{array}{l}(1)\,x+y=1\\(2)x-y=0\end{array}\right\}$$

Solución:

Se suman las ecuaciones 1) y 2) tal cual como se encuentran, en vista de que se facilita al tener el mismo valor y de signos contrarios los coeficientes de la variable y. Esto permite que supuestamente se elimine la variable y, y se puedan sumar los demás términos de manera algebraica.

Después de obtenido el valor de X, se remplaza dicho valor en la ecuación 2), resolviendo las operaciones aritméticas, se obtiene el valor de y.

Se pudo, también haber reemplazado en la ecuación 1), y debiéndose obtener el mismo resultado.

(1)+(2) → 2x=1, x=1/2, y=1-1/2=1/2 → **solución x=1/2; y=1/2**

$$\begin{cases}3x-4y=-6\\2x+4y=16\end{cases}$$

Lo más fácil es suprimir la y, de este modo no tendríamos que preparar las ecuaciones; pero vamos a optar por suprimir la x, para que veamos mejor el proceso.

$$\begin{cases}3x-4y=-6 \xrightarrow{\cdot 2} \\ 2x+4y=16 \xrightarrow{\cdot(-3)}\end{cases}\begin{cases}6x-8y=-12\\-6x-12y=-48\end{cases}$$

Restamos y resolvemos la ecuación:

$$\begin{cases}\cancel{6x}-8y=-12\\ \cancel{-6x}-12y=-48\end{cases}$$

$$-20y=-60 \qquad y=3$$

Sustituimos el valor de y en la segunda ecuación inicial.

$$2x+4\cdot 3=16 \qquad 2x+12=16 \qquad 2x=4 \qquad x=2$$

Solución: x = 2, y = 3

Sustitución:

De alguna de las dos ecuaciones, se despeja cualquier variable y dicha expresión se reemplaza o evalúa en la otra ecuación. Se obtiene una ecuación lineal, cuya solución se evalúa en la ecuación despejada inicialmente.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 4y &= -10 \\ x - 5y &= 2. \end{cases}$$

Solución: Observando el sistema, lo más simple es despejar x de la segunda ecuación para obtener

$$x = 2 + 5y. \quad (*)$$

Ahora sustituimos esta expresión donde aparece x en la primera ecuación y resolvemos:

$$2(2 + 5y) + 4y = -10 \iff 4 + 10y + 4y = -10 \iff 14y = -14 \iff y = -1.$$

Ya tenemos el valor para y, por lo que reemplazando en $(*)$ obtenemos

$$x = 2 + 5(-1) = -3.$$

Para verificar, podemos reemplazar estos dos valores en ambas ecuaciones y ver que las igualdades se cumplen. Por lo tanto la solución al sistema es $x = -3$, $y = -1$, y el sistema es compatible determinado (tiene solución única).

Nota: Si se resuelve un mismo sistema de ecuaciones lineales, por cualquier método, las soluciones al sistema deben ser las mismas.

Inecuaciones lineales de 2x2

Desigualdad

Según (Lexus_Editores, 2008), la desigualdad es la relación que establece que dos cantidades tienen diferente valor.

Los signos que se utilizan para designar desigualdades son:

$>$ se lee: "mayor que"

$<$ se lee: "menor que"

$\geqslant$ se lee: "mayor o igual que"

$\leqslant$ se lee: "menor o igual que"

Definiciones importantes

1) Una cantidad a es mayor que otra cantidad b, si la diferencia (a - b) es positiva, es decir: a > b si a - b > 0

2) Una cantidad a es menor que otra cantidad b, si la diferencia (a - b) es negativa, es decir: a < b si a - b < 0

Propiedades de las desigualdades

1.- Si a ambos miembros de una desigualdad, se suman o se restan una misma cantidad, el sentido de la desigualdad no se altera.

Sea: a > b se cumple que: a ± m > b ± m

2.- Si a los dos miembros de una desigualdad, se multiplican o dividen por una misma cantidad positiva, el sentido de la desigualdad no varía.

Sea: a > b se cumple que: am > bm o $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$, m > 0

3.- Si a los dos miembros de una desigualdad, se multiplican o dividen por una misma cantidad negativa el sentido de la desigualdad se invierte o cambia.

Sea: a > b se cumple: am < bm o $\frac{a}{m} < \frac{b}{m}$, m < 0

4.- Si se suman miembro a miembro dos o más desigualdades del mismo sentido, el resultado es una desigualdad del mismo sentido.

Sea: a > b, c > d entonces: a + c > b + d

5.- Si se multiplican o dividen miembro a miembro dos o más desigualdades del mismo sentido, cuyos miembros son positivos, se obtiene una desigualdad del mismo sentido.

Sea: a > b, y c > d con a > 0, b > 0, c > 0, d > 0

Multiplicando: ac > bd Dividiendo: $\frac{a}{c} > \frac{b}{d}$

6.- Si a ambos miembros de una desigualdad se elevan a una misma potencia impar, el sentido de la desigualdad no varía.

Sea: a > b se tiene: $a^{2m+1} > b^{2m+1}$

7.- Si a ambos miembros de una desigualdad se elevan a una misma potencia par, siendo los dos miembros negativos, se obtiene una desigualdad de signo contrario.

Sea: a > b con a < 0, b < 0 entonces: $a^{2n} < b^{2n}$

8.- Si a ambos miembros de una desigualdad se les extrae una misma raíz de índice impar se obtiene, una desigualdad del mismo sentido.

Sea: a > b entonces: $\sqrt[2m+1]{a} > \sqrt[2m+1]{b}$

Sistemas de inecuaciones lineales

Inecuaciones lineales de primer grado con una variable

Las inecuaciones que se estudian adoptan la forma reducida o simplificada simbólicamente: f(x) ≤ 0 o f(x) ≥ 0, o bien con desigualdades estrictas (<, >), donde f(x) es un polinomio de grado 1 en la variable x, en forma reducida o simplificada simbólicamente.

f(x, y) ≤ 0 o f(x, y) ≥ 0, o bien con desigualdades estrictas, donde f(x, y) es un polinomio de grado 1, en las variables x e y, en forma reducida.

Si una inecuación no adopta la forma reducida, se agruparán las variables y los términos sin variables hasta obtenerla.

Solución de una inecuación

Es todo valor de la variable, o conjunto de valores de las variables, que verifican la desigualdad.

Para expresar convenientemente las soluciones que se obtengan al resolver inecuaciones es necesario que revisemos nuevamente los tipos de intervalos que se describieron en el capítulo tercero.

Resolución de una inecuación

Para resolver una inecuación una vez expresada de forma reducida se procede de la siguiente manera:

- Se resuelve la ecuación polinómica f(x) = 0.
- Las raíces del polinomio, dividen el dominio de la función R, en intervalos. En cada uno de estos intervalos, el signo de la función permanece constante.
- Para saber el signo que tiene f(x) en uno de estos intervalos, bastará evaluar la función en un punto del interior del intervalo.
- Gráficamente, la solución de una inecuación de este tipo, si la tiene, es un intervalo, la unión de varios intervalos, todo el conjunto de los números reales o bien un número finito de números reales.

Ejemplos tomados de (Alvarez, Caballero, & Sánchez, s.f.):

1.- Resolver 1 − 4x ≤ 0.

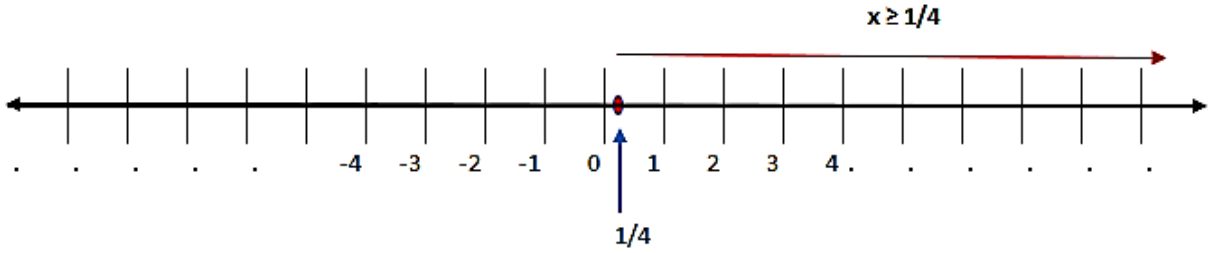
Solución

$$1 - 4x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{1}{4}$$

Luego en la recta real se distinguen dos intervalos $\left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$ y $\left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$:

- Si $x \in \left(-\infty, \frac{1}{4}\right)$, $1 - 4x > 0$.
- Si $x \in \left(\frac{1}{4}, +\infty\right)$, $1 - 4x < 0$.

Luego la solución de la inecuación es $\left[\frac{1}{4}, +\infty\right)$ donde se incluye el número real $x = 1/4$, que es donde la expresión $1 - 4x$ vale 0.



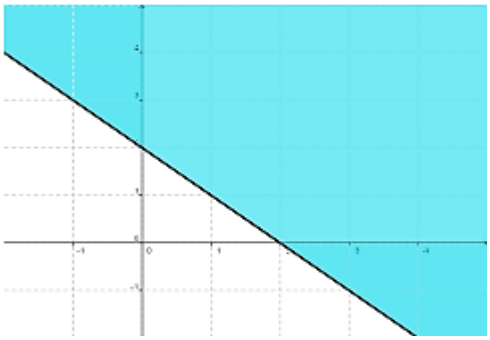
2.- Representar el conjunto de soluciones de la inecuación $x + y \geq 2$.

Solución:

La inecuación $x + y \geq 2$ es equivalente a la inecuación $x + y - 2 \geq 0$.

Luego se representa la recta $x + y - 2 = 0 \Leftrightarrow y = -x + 2$.

En la figura, se observa la región sombreada que junto con la recta (semiplano) constituyen el conjunto de soluciones de la inecuación $x + y - 2 \geq 0$.



Nota: Para resolver cualquier inecuación donde f(x) o f(x, y) que no sean un polinomio, se produce de la misma manera. En el Dom(f) se consideran los puntos que resuelven la ecuación f(x) = 0 o f(x, y) = 0, que lo dividirán en intervalos de la recta real o regiones del plano y análogamente se obtiene la solución.

3.- Resolver el sistema de inecuaciones

$$\left.\begin{array}{l} 4x - 8 \leq 0 \\ \frac{3}{2}x + 2 < 2x + \frac{5}{2} \end{array}\right\}$$

Solución

Se resuelven ambas inecuaciones: $4x - 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$.

Entonces:

- Si $x \in (-\infty, 2)$, $4x - 8 < 0$.
- Si $x \in (2, +\infty)$, $4x - 8 > 0$.

Luego la solución de la primera inecuación es $(-\infty, 2]$.

Agrupando los términos con la variable x, y los términos independientes se obtiene la inecuación equivalente a la dada en forma reducida

$$\frac{3}{2}x + 2 < 2x + \frac{5}{2} \Leftrightarrow \frac{-x}{2} - \frac{1}{2} < 0$$

Se resuelve la inecuación $\frac{-x}{2} - \frac{1}{2} < 0.$

$$\frac{-x}{2} - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x = -1$$

Entonces:

- Si $x \in (-\infty, -1)$, $\frac{-x}{2} - \frac{1}{2} > 0$ es decir, $\frac{3}{2}x + 2 > 2x + \frac{5}{2}$
- Si $x \in (-1, +\infty)$, $\frac{-x}{2} - \frac{1}{2} < 0$ es decir, $\frac{3}{2}x + 2 < 2x + \frac{5}{2}$

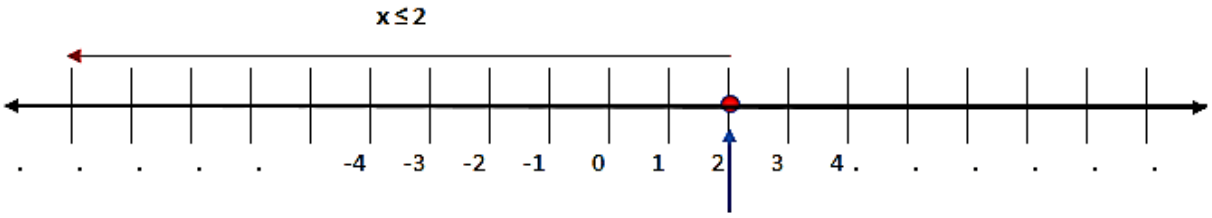
Luego la solución de la segunda inecuación es $(-1, +\infty)$.

Por tanto, la solución del sistema de inecuaciones dado es

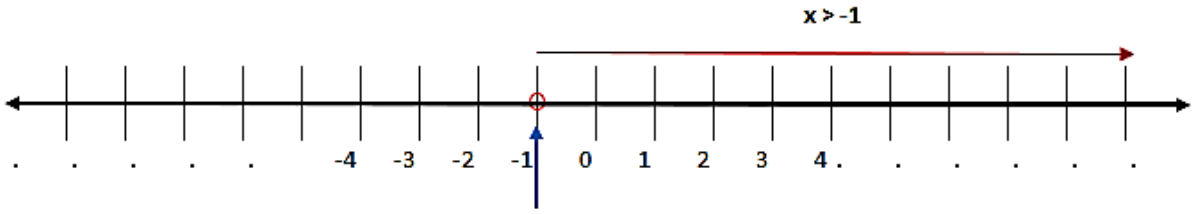
$$(-1, +\infty) \cap (-\infty, 2] = (-1, 2]$$

La solución encontrada, indica que el sistema de inecuaciones del ejemplo, se cumplen o son válidas, para cualquier valor que se escoja dentro del intervalo (-1, 2].

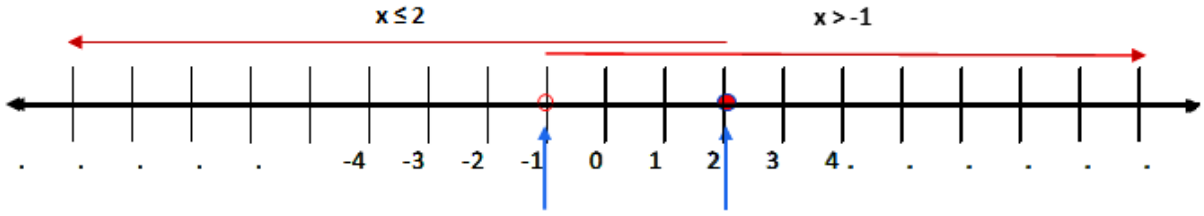
Solución de la primera inecuación: $4x - 8 \leq 0$

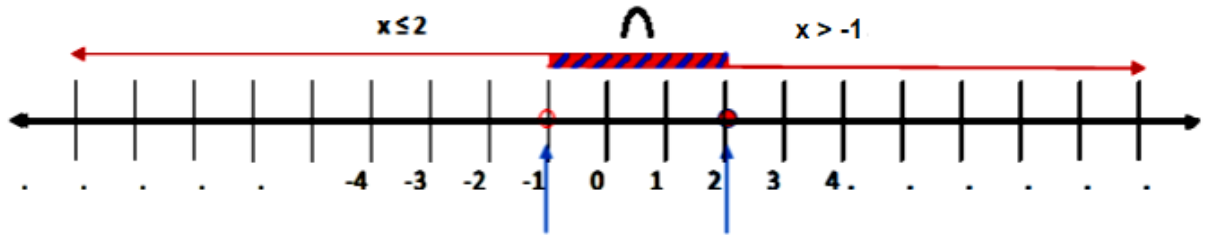


Solución de la segunda inecuación: $\frac{3}{2}x + 2 < 2x + \frac{5}{2}$



Si superponemos las dos soluciones gráficas, claramente se puede visualizar que hay una intersección entre las dos soluciones:





$$(-1, +\infty) \cap (-\infty, 2] = (-1, 2]$$

Sistemas de dos inecuaciones lineales con dos variables

Son sistemas formados por dos o más inecuaciones con dos incógnitas:

$$a_1x + b_1y \leq c_1$$
$$a_2x + b_2y \leq c_2$$

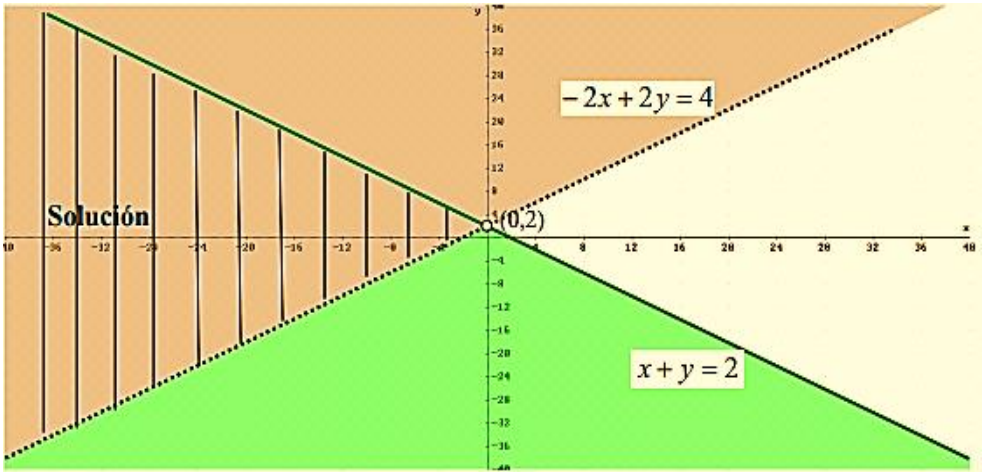
o con cualquier signo otro símbolo de desigualdad.

Se resuelve cada una de las inecuaciones lineales que forman el sistema y se representa su solución. La intersección del conjunto de soluciones de cada una de las inecuaciones lineales es la solución del sistema.

Ejemplos tomados de (Alvarez, Caballero, & Sánchez, s.f.):

1.-

$$\left.\begin{array}{l}(1) \quad x+y \leq 2 \\ (2) \quad -2x+2y > 4\end{array}\right\}$$

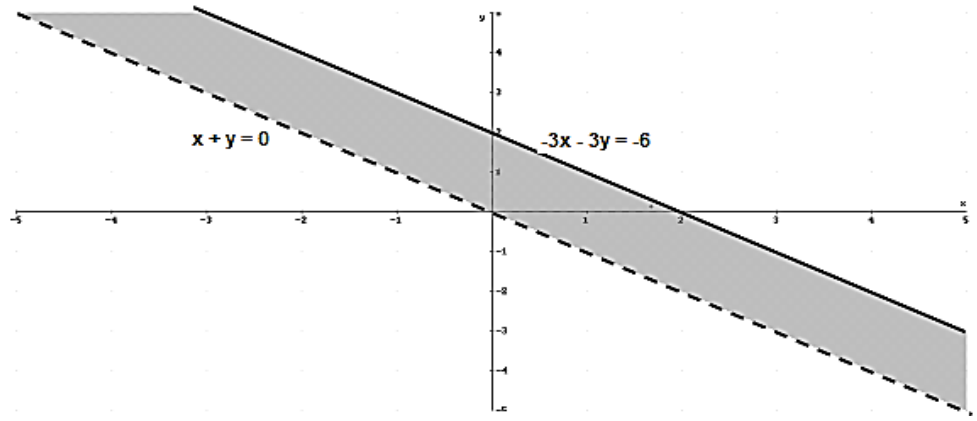


La solución al sistema de inecuaciones, está dado por el área rayada; cualquier par ordenado (x, y) que se tome dentro del área solución, cumple con el sistema de inecuaciones.

2.-

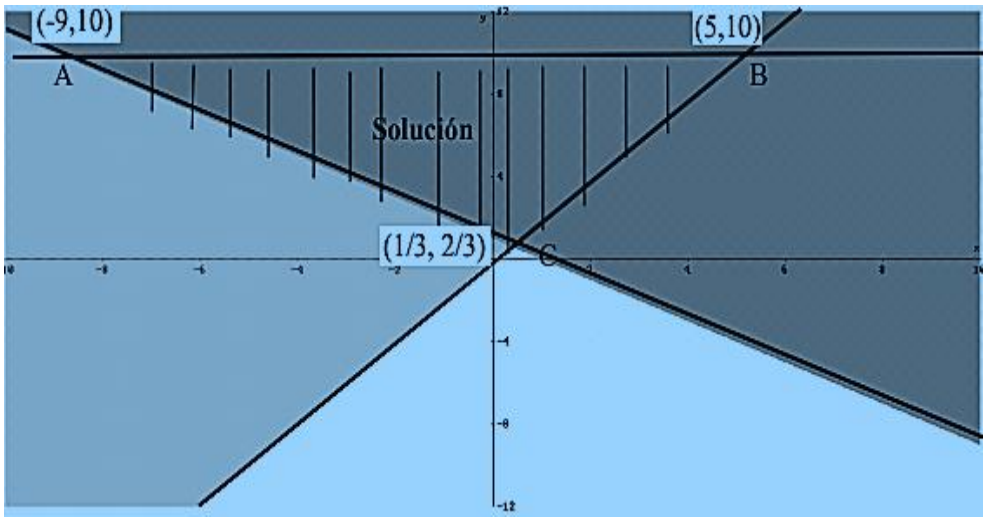
$$\left.\begin{array}{l}(1)\quad x+y>0\\(2)\ -3x-3y\geq -6\end{array}\right\}$$

Son rectas paralelas y la solución es el espacio comprendido entre ambas rectas. Veamos la figura:



3.-

$$\left.\begin{array}{l}(1)\ 2x-y\leq 0\\(2)\ \ x+y\geq 1\\(3)\quad y\leq 10\end{array}\right\}$$



Calculemos A, B y C.

Cálculo de A: punto de corte de $\left.\begin{matrix} y=10 \\ x+y=1 \end{matrix}\right\}$ → (-9,10)

Cálculo de B: punto de corte de $\left.\begin{matrix} y=10 \\ 2x-y=0 \end{matrix}\right\}$ → (5,10)

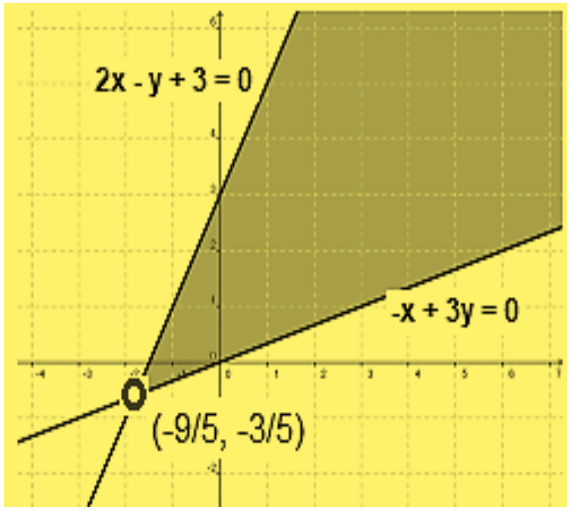
Cálculo de C: punto de corte de $\left.\begin{matrix} x+y=1 \\ 2x-y=0 \end{matrix}\right\}$ → (1/3, 2/3)

4.- Representar el conjunto de soluciones del sistema de inecuaciones:

$$\left.\begin{matrix} 2x-y+3\geq 0 \\ -x+3y\geq 0 \end{matrix}\right\}$$

Solución

Se representan las rectas: 2x − y + 3 = 0 y −x + 3y = 0 y se calcula, si existe, la solución del sistema lineal formado por estas dos ecuaciones, que es (−9/5, −3/5).



El conjunto solución del sistema de inecuaciones lineales del ejemplo, corresponde al área sombreada entre las dos ecuaciones.

GLOSARIO

Función: Se refiere a la relación existente entre las variables.

Sistema: Hace referencia a la cantidad de ecuaciones o inecuaciones.

Variable: Término dado especialmente a las últimas letras del alfabeto. Indica la diversidad de valores que pueden tomar estas letras o incógnitas.

BIBLIOGRAFÍA

Abarca_Calderón, F. (s.f.). *Teoría de conjuntos y análisis combinatorio, herramientas para el estudio de la probabilidad.* San José: Universidad de Costa Rica, Escuela de Ingeniería Eléctrica.

Acevedo_González, G. (2011). *Lógica Matemática.* Medellín: Centro Nacional de Medios para el Aprendizaje, Universidad Nacional Abierta y a Distancia UNAD.

Alvarez, S., Caballero, M., & Sánchez, M. (s.f.). *Los números reales.* Murcia: Universidad de Murcia.

Anónimo. (s.f.). *4.1. Introducción a funciones exponenciales y logarítmicas.* Obtenido de Unidad 4, Funciones exponenciales y logarítmicas: https://portalacademico.cch.unam.mx/repositorio-de-sitios/matematicas/matematicas-4/mate4geogebra/docs/unidad4.pdf

Anónimo. (s.f.). *La Recta.* Obtenido de https://www.uv.es/lonjedo/esoProblemas/3eso11recta.pdf

Aufmann, R., & Lockwood, J. (2013). *Algebra elemental.* Santa Fé: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

Dobarro, F., Schlaps, E., & Viñoles, D. (2021). *Lógica proposicional y teoria de conjuntos una rápida introducción.* Ushuaia: Universidad Nacional de Tierra Del Fuego. UNTDF, Instituto de Ciencias Polares, Ambiente y Recurso Naturales.

Esteban_Duarte, P. (s.f.). *Conjuntos numéricos.* Medellín: Universidad EAFIT, Departamento de ciencias matemáticas.

Gómez_Lozano, A. (2017). *Notas sobre lógica matemática. (Documento de docencia N° 16).* Bogotá: Universidad Cooperativa de Colombia. doi:https://doi.org/10.16925/greylit.2220

Jiménez _Nieto, J. (s.f.). *Funciones exponenciales y logarítmicas - Matemáticas Online.* Obtenido de Funciones exponenciales y logarítmicas: https://www.matematicasonline.es/cuarto-eso/apuntes2/Funciones-exponenciales-logar%C3%ADtmicas.pdf

La Luz, J. (s.f.). *Taller 1: Conociendo los números reales y sus propiedades (para maestros de séptimo a noveno grado).* Bayamón: Universidad de Puerto Rico, Departamento de matemáticas.

Lexus_Editores. (2008). *Álgebra manual de preparación pre-universitaria.* Lima: Lexus Editores.

Rivera, M. (2013). *Matemáticas básicas preuniversitarias.* Panamá: Universidad Tecnológica de Panamá, Departamento de ciencias exactas.

Sobisch, E. (s.f.). *Funciones exponenciales y logarítmicas - FCEN (UNCuyo).* Obtenido de UNIDAD N°5 Funciones exponenciales y logarítmicas: https://fcen.uncuyo.edu.ar/upload/unidad-5-actualizada.pdf

UCSC. (03 de 2020). *MANUAL DE ÁLGEBRA, Unidad de Acompañamiento y Acceso a la Universidad.* Obtenido de https://sitios.ucsc.cl/pace/wp-content/uploads/sites/41/2020/03/ManualAlgebra.pdf

UTN. (s.f.). *Ecuaciones e inecuaciones.* Obtenido de Manual de Matemática preuniversitaria: file:///C:/Users/Dell/Desktop/TEC%20BIOLOG%C3%8DA%20-%20QU%C3%8DMICA/MATEM%C3%81TICAS%20I/ecuaciones%20e%20inecuaciones/Unidad%202%20-%20Fuente%202+.pdf

Vargas_Ramírez, T., & Plata_Zamora, J. (2020). *Álgebra de Conjuntos.* Zaragoza: Facultad de Estudios Superiores Zaragoza, Universidad Nacional Autónoma de México.

Vázquez, E. (s.f.). *Taller funciones exponenciales y logarítmicas.* Obtenido de Taller funciones exponenciales y logarítmicas: https://docs.uprb.edu/deptmate/material%20suplementario/CIME/10mo%20a%2012mo/T7%3B%20Funciones%20%20Exponenciales%20y%20Logar%EDtmicas%2810mo%20a%2012mo%29.pdf





Primera Edición

ISBN: 978-9942-692-14-6

