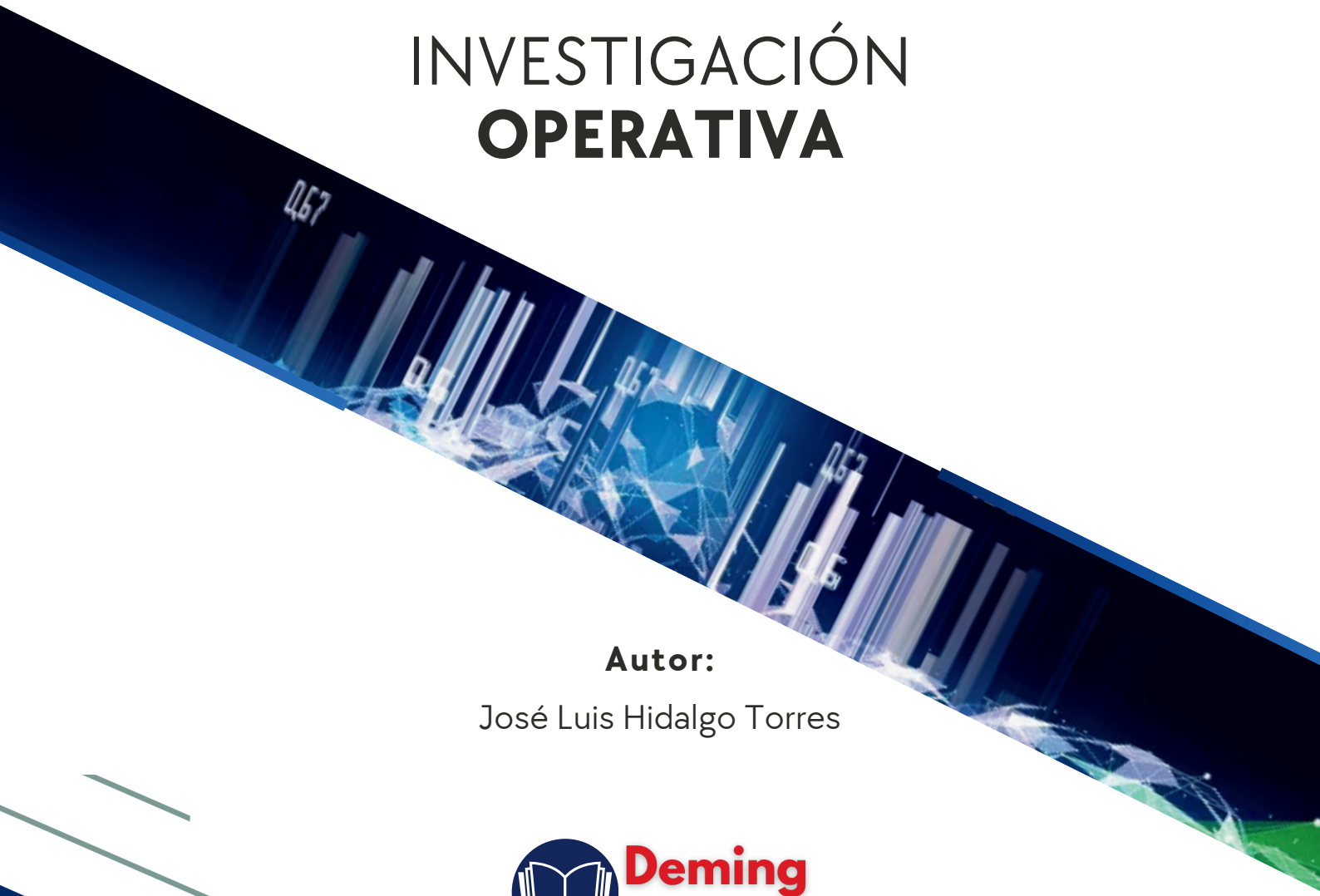
INSTITUTO SUPERIOR TECNOLÓGICO UNIVERSITARIO CORPORATIVO
EDWARDS DEMING®
saber qué hacer y cómo hacerlo

INVESTIGACIÓN OPERATIVA



Autor:

José Luis Hidalgo Torres

Deming
EDITORIAL TECNOLÓGICA

AÑO 2025

José Luis Hidalgo Torres

Investigación operativa

Prólogo escrito por Daniel Navarrete

Editorial Deming

Investigación operativa
Autor: José Luis Hidalgo Torres
Docente del Instituto Superior Tecnológico Universitario Corporativo Edwards Deming

Editorial Deming
Dirección: Calle Edmundo Chiriboga OE-3H y Jorge Páez, Quito, Ecuador

Primera edición – 2025

ISBN: 978-9942-692-48-1

Impreso por: GraficArte

Este libro ha sido debidamente examinado y valorado en la modalidad doble par ciego con el fin de garantizar la calidad de la publicación.

© Este libro es de uso científico, académico e investigativo. Prohibida su comercialización.

Para más información, escribir al correo:
editorial@deming.edu.ec

La toma de decisiones informada y eficiente es una de las habilidades más valiosas en los entornos organizacionales y productivos actuales. Este libro ofrece una introducción sólida a las herramientas cuantitativas que permiten abordar problemas complejos con soluciones sistemáticas y optimizadas. El texto guía al lector a través de los fundamentos de la programación lineal, el transporte, la teoría de colas, la simulación y otros modelos clásicos de optimización. Lo hace con un enfoque didáctico, combinando claridad teórica con aplicaciones prácticas que ilustran cómo la matemática y la lógica pueden traducirse en decisiones estratégicas. Lo que más destaca es su estructura clara y progresiva, ideal para quienes se inician en esta disciplina, pero también útil para aquellos que buscan reforzar sus competencias en análisis de operaciones. Además, incluye ejemplos resueltos y actividades que fomentan la comprensión aplicada.

El valor de esta obra radica en su capacidad de conectar el razonamiento lógico con la acción práctica, haciendo de la investigación operativa una herramienta viva y útil para el mundo real.

Daniel Navarrete

ÍNDICE DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN 13
CAPÍTULO UNO OPTIMIZACIÓN LINEAL 14
Introducción. 14
Formulación de modelos de programación lineal, restricciones 14
La función objetivo 15
Generalidades de Solver 16
Cómo activar Solver en Excel 17
Terminología de Solver 20
Recomendaciones para la construcción de los modelos de programación lineal en Solver 21
Cómo formular modelos de programación lineal 22
Ejemplos sobre el uso básico de Solver 24
CAPÍTULO DOS PROGRAMACIÓN LINEAL: ANÁLISIS GRÁFICO 37
Introducción 37
Graficación de desigualdades y contornos 37
Líneas de contorno 41
El método de resolución gráfica 42
Tipos de soluciones por el método gráfico 45
Solución óptima única acotada 46
Solución óptima múltiple acotada 53
Solución óptima única no acotada 55
Solución óptima múltiple no acotada 58
Ninguna solución 60
Análisis de sensibilidad 64
Restricciones 65
CAPÍTULO TRES PROGRAMACIÓN LINEAL: INFORME DE SENSIBILIDAD DE SOLVER 67
Introducción 67

¿Qué es un análisis de sensibilidad? 67
¿Para qué sirve un análisis de sensibilidad? 68
Evaluación de la confianza en el modelo 68
Usos 68
¿Cómo hacer un análisis de sensibilidad? 69
Técnicas 69
Análisis de sensibilidad local 69
Análisis de sensibilidad global 70
Informes de Solver 70
Ejercicios de aplicación del Análisis de sensibilidad utilizando Solver de Excel: 74
GLOSARIO DE TÉRMINOS 93
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS 94

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Terminología del Solver..... 21
Tabla 2. Estructuración de los datos del problema..... 25
Tabla 3. Resultados maximizados por Solver..... 27
Tabla 4. Estructura para ingreso de datos del problema 29
Tabla 5. Datos registrados en la estructura propuesta 29
Tabla 6. Formulación de las celdas, para obtener resultados esperados 30
Tabla 7. Resultados de Solver para el problema. 35
Tabla 8. Informe de sensibilidad del problema. 36
Tabla 9. Ejemplo de las restricciones de oro y plata..... 66

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Procedimiento de aplicación del Solver 16
Figura 2. Menú de Opciones de Excel, para instalar Solver 17
Figura 3. Escoger Ir en Complementos de Excel de Administrar 18
Figura 4. Cuadro de diálogo Complementos 19
Figura 5. Comando Solver 19
Figura 6. Cuadro de Parámetros de Solver 20
Figura 7. Parámetros de Solver para el problema de las pizzas. 26
Figura 8. Resultados de Solver 27
Figura 9. Selección del Solver 31
Figura 10. Parámetros de Solver 31
Figura 11. Selección de Máximo para la celda objetivo. 32
Figura 12. Asignación de restricciones 33
Figura 13. Asignación del recurso aluminio 34
Figura 14. Restricción de no negatividad 34
Figura 15. Variables de decisión enteras 35
Figura 16. Gráfico de la ecuación 38
Figura 17. Punto de prueba 38
Figura 18. El punto de prueba no cumple con la desigualdad 39
Figura 19. Gráfica de ejemplo 41
Figura 20. Sistema cartesiano 42
Figura 21. Tipos de solución 45
Figura 22. Coeficientes objetivos, tecnológicos, recursos de la F.O. de un ejemplo. 64
Figura 23. Tipos de Informes de Solver 70
Figura 24. Métodos de resolución de Solver. 71
Figura 25. Opciones de Solver 72
Figura 26. Cargar/Guardar del cuadro Parámetros de Solver 73

INTRODUCCIÓN

La Investigación Operativa (IO) es una rama de las matemáticas que usa modelos matemáticos y algoritmos como apoyo para tomar decisiones y determinar una solución óptima.

Se busca que las soluciones obtenidas, sean eficientes y eficaces en el tiempo, con los recursos, los beneficios, los costos, entre otros; respecto de aquellas decisiones adoptadas o tomadas de manera intuitiva y sin la ayuda de herramientas apropiadas que den las pautas de certeza.

Los modelos de programación lineal, frecuentemente se usan para resolver una gran variedad de problemas reales de la ingeniería y campos de las ciencias sociales, permitiendo que las empresas obtengan importantes beneficios y optimización de los recursos disponibles para su utilización en los procesos industriales.

CAPÍTULO UNO
OPTIMIZACIÓN LINEAL

Introducción.

El término optimización lineal, puede tener componentes muy diversos dependiendo de su aplicación como, por ejemplo, en ámbitos industriales, empresariales y de administración pública.

La modelización lineal, sirve para tomar decisiones con el uso de técnicas cuantitativas; para lo cual es necesario contar con amplios conocimientos de matemáticas y con aplicación en la realidad.

Por la globalización económica, son cada vez más las empresas que emplean las técnicas de investigación operativa para la toma científica de decisiones.

Formulación de modelos de programación lineal, restricciones

Según (Eppen, Gould, Schmidt, Moore, & Weatherford, 2000), un primer paso en la formulación de modelos será el reconocimiento de las restricciones que son limitaciones impuestas al grupo de decisiones permisibles.

Por ejemplo:

1. Un administrador de cartera tiene una cantidad determinada de capital a su disposición Las decisiones, se limitan por la cantidad de capital disponible y por las regulaciones gubernamentales.
2. Las decisiones del administrador de una planta están limitadas por la capacidad de la planta y por la disponibilidad de recursos.
3. Los planes de una aerolínea para llevar a cabo la asignación del personal y los vuelos están restringidos por las necesidades de mantenimiento de los aviones y por la cantidad de empleados disponibles.
4. La decisión de una compañía petrolera de utilizar determinado tipo de hidrocarburo en la producción de gasolina está restringida por las características de dicho combustible (por ejemplo, el valor nominal del octanaje requerido y la capacidad antidetonante de la gasolina en cuestión).

Las restricciones generalmente son de dos formas: limitaciones y requerimientos.

Las restricciones pueden subdividirse aún más; en limitaciones y requerimientos físicos, las limitaciones y requerimientos económicos y las limitaciones y exigencias de política operativa.

La función objetivo

La función objetivo es la ecuación matemática formulada según el tipo de problema y que será optimizada de acuerdo a las limitaciones o restricciones establecidas y con variables que requieren ser minimizadas o maximizadas, usando técnicas de programación lineal o no lineal.

Cada modelo de programación lineal tiene dos características importantes:

1. Una función objetivo por maximizar o minimizar
2. Ciertas restricciones.

Consideremos los mismos ejemplos precedentes.

El administrador de cartera podría tener interés en maximizar el rendimiento de la misma.

El gerente de producción podría estar interesado en satisfacer la demanda con un costo de producción mínimo.

La aerolínea se ha propuesto cubrir un itinerario determinado al mínimo costo posible.

La compañía petrolera desea utilizar el crudo con el que se cuenta, de tal modo que se maximicen las ganancias.

Como se puede ver en los ejemplos; hay alguna medida de desempeño y quien toma las decisiones desea maximizar (ganancias, rendimiento, eficiencia o efectividad) o minimizar (costo o tiempo). En el léxico de la optimización, la medida de desempeño por optimizar se llama función objetivo.

La programación lineal proporciona un modelo de optimización con restricciones, representando el problema de asignación de recursos escasos que están sujetos a restricciones y poder optimizar objetivos de interés.

Generalidades de Solver

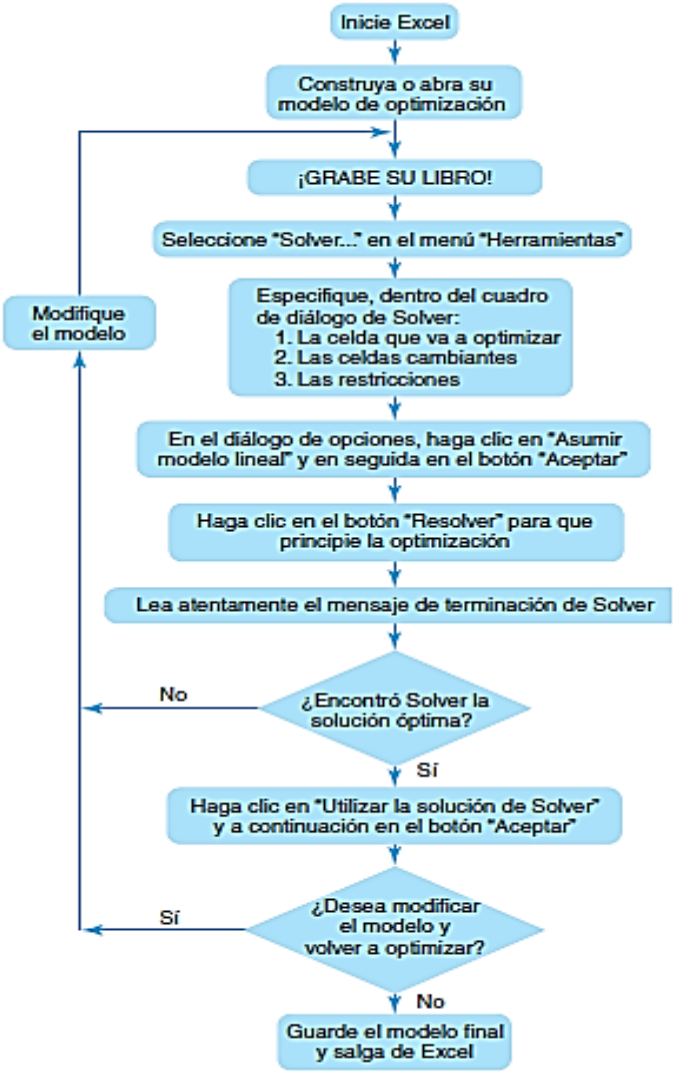
Solver *Figura 1*, de acuerdo a (ECURED, 2021) es una herramienta presente en las hojas de cálculo, como MS Excel y OpenOffice.org Calc, que permite resolver problemas de optimización; Solver optimiza los modelos sujetos a restricciones, como los modelos de programación lineal y no lineales, lo que permite obtener las soluciones óptimas para un modelo determinado y de esta forma tomar las mejores decisiones en una empresa.

A partir de unos objetivos y estableciendo unas condiciones (restricciones), con la herramienta Solver se puede buscar el valor óptimo para una celda, denominada celda objetivo, donde se escribe la fórmula de la función objetivo.

Solver cambia los valores de un grupo de celdas, denominadas de variables de decisión y que estén relacionadas, directa o indirectamente, con la fórmula de la celda objetivo.

Figura 1.

Procedimiento de aplicación del Solver



Fuente: (Eppen, Gould, Schmidt, Moore, & Weatherford, 2000)

Según (Excel Total, 2021):

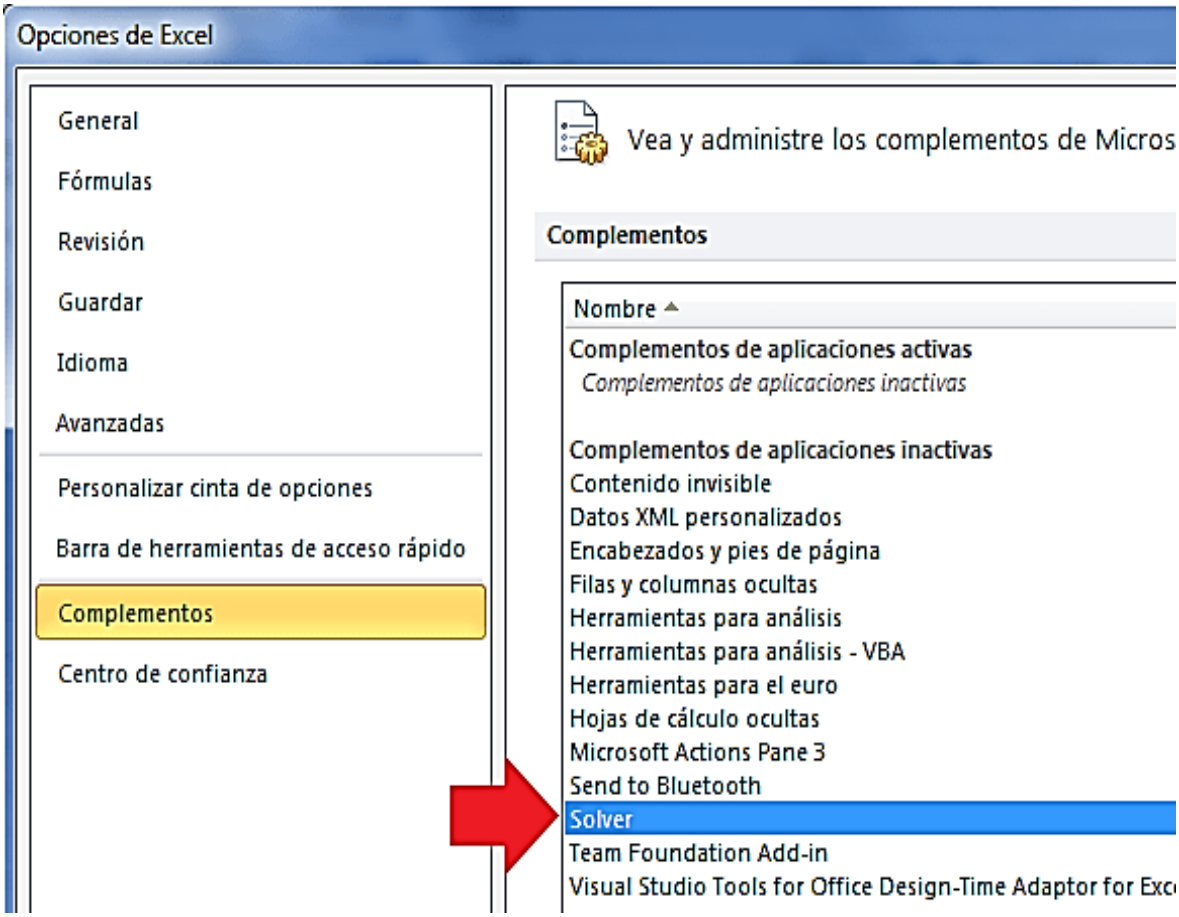
Cómo activar Solver en Excel

Solver está incluido dentro de Excel, pero se encuentra desactivado de manera predeterminada.

Para poder habilitarlo debes ir a la ficha Archivo y elegir Opciones y se mostrará el cuadro de diálogo *Opciones de Excel* donde deberás seleccionar **Complementos**. **Figura *2***

Figura 2.

Menú de Opciones de Excel, para instalar Solver

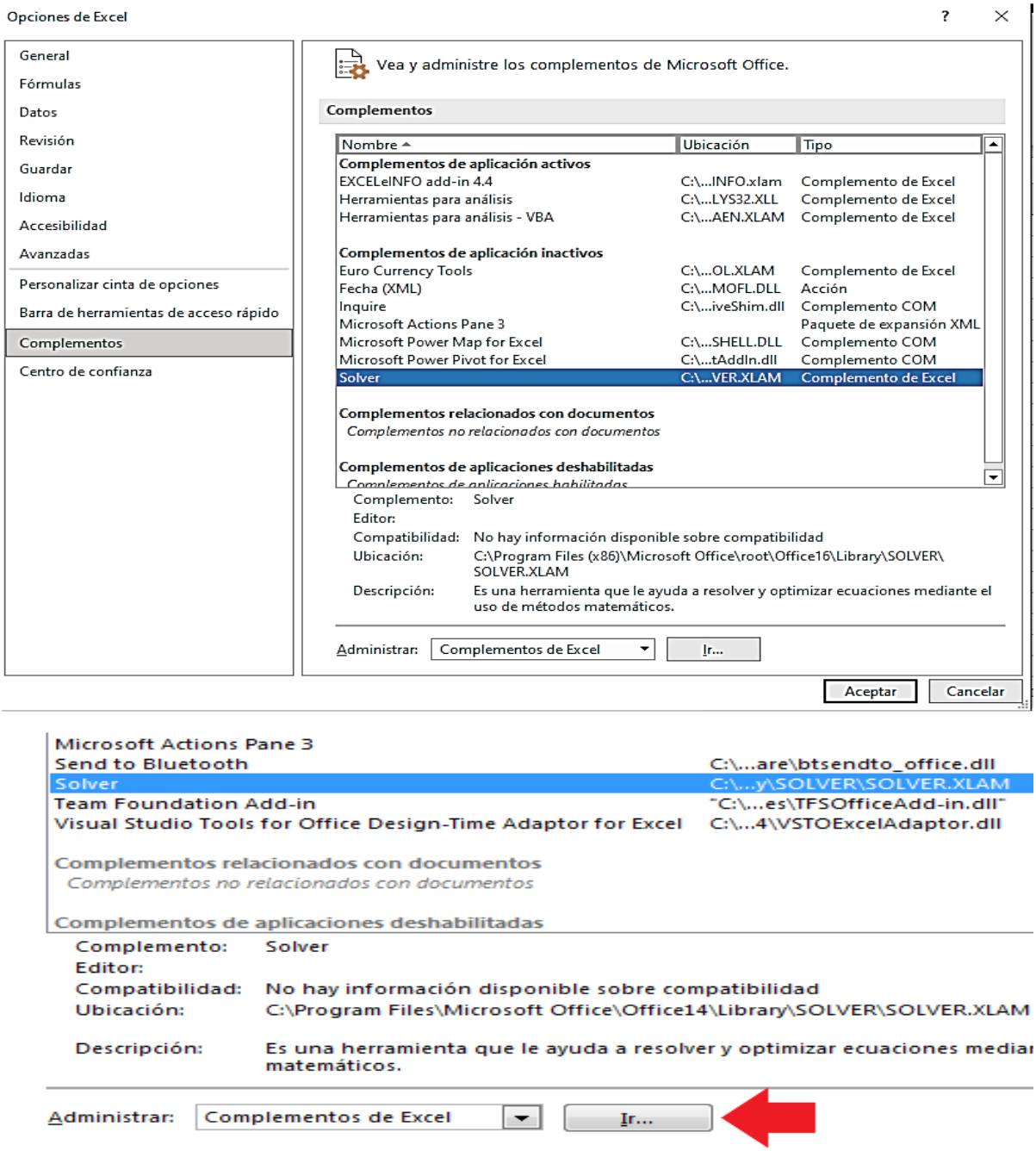


Fuente*:* (Excel Total, 2021)

En el panel derecho encontrarás el complemento, llamado Solver. Para activarlo debes hacer clic en el botón *Ir* de la sección Administrar que se encuentra más bajo de la misma ventana desplegada. Figura *3*

Figura 3.

Escoger Ir en Complementos de Excel de Administrar

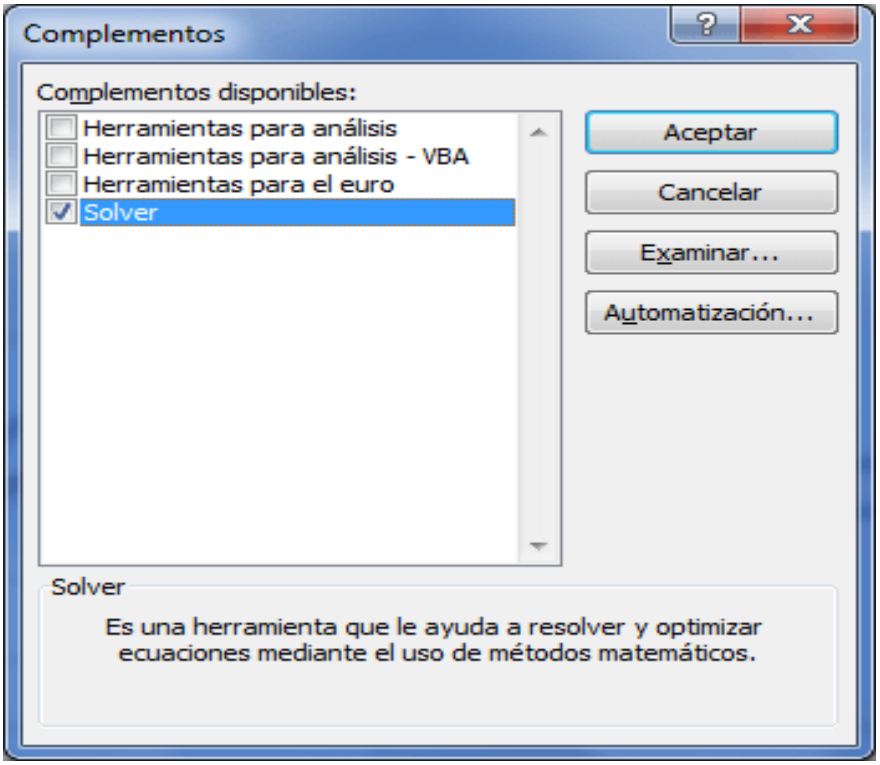


Fuente*:* (Excel Total, 2021)

Al hacer lo indicado, se mostrará el cuadro de diálogo Complementos y deberás marcar la casilla de verificación de Solver y aceptar los cambios. Figura ***4***

Figura 4.

Cuadro de diálogo Complementos

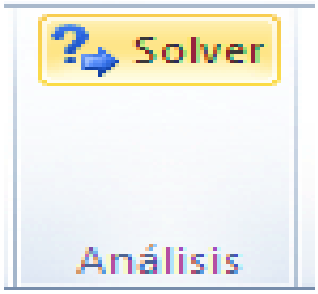


Fuente: *(Excel Total, 2021)*

Para utilizar el complemento Solver debes ir a la ficha Datos y Excel habrá creado un nuevo grupo llamado Análisis el cual contendrá el comando Solver**.** Figura *5*

Figura 5.

Comando Solver

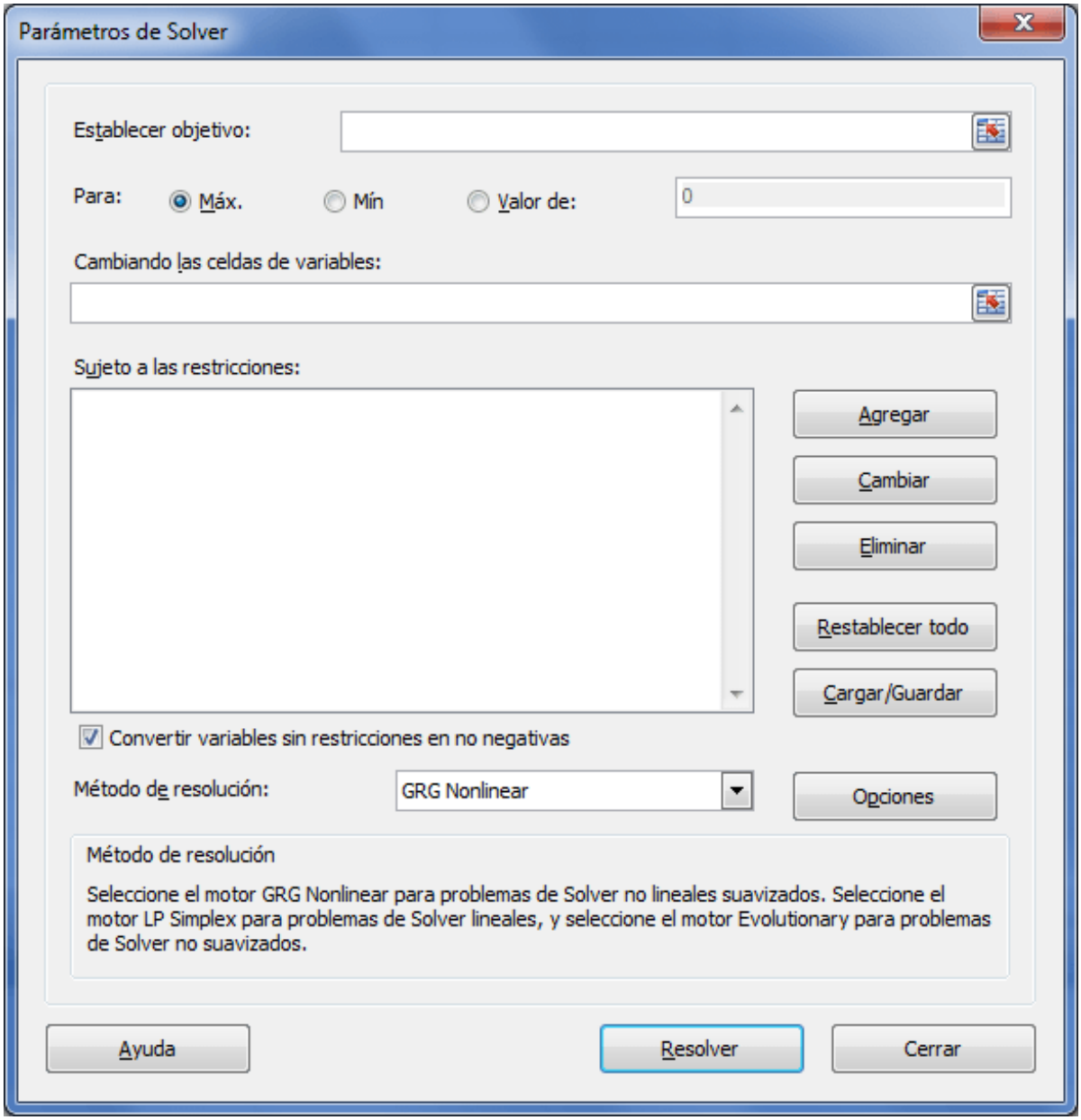


Fuente: (Excel Total, 2021)

Al hacer clic sobre ese comando se mostrará el cuadro de diálogo Parámetros de Solver el cual nos permitirá configurar y trabajar con el complemento recién instalado. Figura ***6***

Figura 6.

Cuadro de Parámetros de Solver



Fuente*:* (Excel Total, 2021)

Terminología de Solver

Ahora que se tiene una idea general del funcionamiento de Solver, veamos cómo se dan las instrucciones para optimizar un problema de programación lineal (PL).

Solver comprende a través de las celdas de una hoja de cálculo y no como la representación simbólica que se usa en los problemas de PL.; las diferencias son nominales. La ***Tabla 1*** resume las diferencias entre la nomenclatura que se usa para los problemas de PL y el Solver.

Tabla 1.

Terminología del Solver

TERMINOLOGÍA DE LOS MODELOS DE PL	TERMINOLOGÍA DE SOLVER
Función objetivo	Celda objetivo
Variables de decisión	Cambiando las celdas
Restricciones	Restricciones
Función de restricción (LI)	Referencia de celda de restricción
LD	Restricción
Modelo de PL	Asumir modelo lineal

Fuente: (Eppen, Gould, Schmidt, Moore, & Weatherford, 2000)

Es importante recordar que las decisiones negativas no tienen significado alguno y, por tanto, con frecuencia debe aplicarse una restricción de no negatividad a las variables de decisión de la PL. En virtud de que son muy obvias, estas restricciones de no negatividad pocas veces se mencionan explícitamente en el problema de PL construido en hojas de cálculo Excel. Cuando se utiliza Solver para optimizar problemas de PL, la falla más común que se comete es pasar por alto la especificación de no negatividad para las variables de decisión.

Recomendaciones para la construcción de los modelos de programación lineal en Solver

Para facilitar el empleo de Solver, se debe desarrollar tres hábitos que son muy útiles para la

construcción de modelos de PL:

Primero, asegurar que las cifras de su modelo de PL tengan una escala, de tal manera que la diferencia entre los números más pequeños y los más grandes de la hoja de cálculo electrónica que se va a optimizar, no sea mayor de 6 o 7 órdenes de magnitud.

Por ejemplo, si se tiene cantidades del orden de: 1000000, trabaje por ejemplo con 1000 y haga mención en alguna parte de sus datos o en el título de la columna de este tipo de datos de que las cantidades son por mil o se deben multiplicar por mil; de similar manera para cantidades muy pequeñas.

Además de la posible omisión de las restricciones de no negatividad, la mayor parte de los problemas que surgen en la optimización de modelos de PL con Solver son provocados por el uso de escalas incorrectas.

En general, las causas menos engañosas de las fallas que se podrían presentar al usar Solver

pueden detectarse más fácilmente, como es el caso de los modelos que tienen demasiadas restricciones, dando el mensaje de terminación como: Solver no ha encontrado una solución válida.

Segundo, Solver acepta entradas del LD (lado derecho) en el cuadro de diálogo de Parámetros de Solver constituidas por constantes numéricas o referencias a celdas o a fórmulas, y el ingresarlas en la construcción de su modelo no afecta el proceso de optimización.

Tercero, todos los LD de la sección de Restricciones del cuadro de diálogo de Parámetros de Solver deben contener: constantes o fórmulas cuya evaluación no cambiará durante la optimización con Solver, es decir, fórmulas no relacionadas directa o indirectamente con los valores de las variables de decisión.

Cómo formular modelos de programación lineal

- Desarrolle el modelo simbólico de PL con la mayor rapidez posible y no interprete en los problemas más de lo que hay en ellos; apéguese únicamente a lo que se le indica:
- Evite detallar demasiado su modelo o nunca logrará formularlo completo y consistente.
- Evite las relaciones no lineales en sus construcciones de modelos, por lo menos al principio.
- Conviene observar que algunas relaciones no lineales pueden convertirse en lineales con facilidad y sin que el modelo sufra la menor pérdida de generalidad.
- No se preocupe prematuramente por las consecuencias reales de los valores no enteros en las variables de decisión que podrían presentarse al optimizar el modelo.
- Muchos modelos de PL interesantes se refieren a la toma de decisiones a lo largo de periodos múltiples, como ocurre en los casos en que es necesario seleccionar las cantidades de producción mensual para varios meses, en situaciones en que los meses no son independientes unos de otros.
- Asegurar que el modelo de PL tenga incorporado algún tipo de tensión que lo obligue a ensayar las concesiones no obvias durante la optimización.

- Tenga mucha precaución cuando utilice restricciones de igualdad, limitarlas en la construcción de sus modelos de PL, de ser posible, en los casos en que se debe mantener una relación de definición.

La mayor dificultad cuando se incluyen restricciones de igualdad consiste en el peligro de restringir excesivamente su modelo, el cual, al ser optimizado, podría producir decisiones de baja retribución o, en el peor de los casos, no proporcionar ninguna decisión factible. Tenga especial cuidado con la inclusión de restricciones implícitas de política organizacional que se manifiesten como igualdades en su modelo.

Por otra parte, si las restricciones de política operativa son importantes en el modelo, considere la opción de incluirlas como desigualdades y no como igualdades.

- No añada restricciones, a menos que de verdad sean necesarias para la situación, a partir de las cuales se esté construyendo el modelo.

En resumen; se ha definido las restricciones como condiciones matemáticas que excluyen ciertas combinaciones de valores para las variables de decisión, y definimos como decisiones factibles o permisibles aquellos valores de las variables que satisfacen todas las restricciones.

La programación lineal como modelo matemático, tiene las siguientes condiciones:

1. Contar con una función objetivo lineal que debe maximizarse o minimizarse.
2. Incluir restricciones lineales, cada una de las cuales es una desigualdad o una igualdad matemática.

La flexibilidad que ofrecen las hojas de cálculo electrónicas para la formulación de modelos nos impone la necesidad de trabajar con una disciplina, a fin de desarrollar representaciones simplificadas en hojas de cálculo que sean: fieles al modelo de PL, documentables por sí mismas, adecuadas para la optimización con Solver y que no provoquen problemas posteriores en la interpretación de los informes de Solver.

Le conviene recordar cuatro cosas para no caer en trampas cuando trabaje con Solver:

1. Cualquier fórmula que afecte la celda de función objetivo o las restricciones debe ser lineal si involucra las variables de decisión directa o indirectamente, a través de las fórmulas de otras celdas.

2. Desde el punto de vista algebraico, los modelos lineales son solamente un caso especial de los modelos no lineales.

   Si inadvertidamente usted se olvida de marcar la opción Asumir modelo lineal y optimiza un modelo de programación lineal utilizando el sistema de optimización no lineal de Solver, es probable que no obtenga la solución óptima; aun en caso de que la obtenga verá que los informes de Solver, son diferentes para ambos tipos de procedimientos.

3. El cambio del lado derecho (LD) de cada restricción del cuadro de diálogo de Parámetros de Solver debe hacer referencia a celdas de la hoja de cálculo que sean constantes o cuyos valores numéricos sean constantes y no cambien durante la optimización.

   Se recomienda insertar las fórmulas y constantes en las celdas de la hoja de cálculo electrónica e indique en los campos del cuadro de diálogo Agregar restricción todas las referencias que correspondan a las celdas de la hoja de trabajo.

4. La asignación de nombres a los intervalos de celdas correspondientes a variables de decisión, a la celda de medición del desempeño, a los grupos de celdas de restricción del LI que corresponden al mismo tipo de desigualdad y a los grupos de celdas del LD correspondientes al mismo tipo de desigualdad, son pasos útiles para la debida documentación de los modelos de PL más grandes.

Ejemplos sobre el uso básico de Solver

1.- En un establecimiento de ventas de pizzas, ofrece dos tipos de pizza tradicionales, Pepperoni ($30) y Vegetariana ($35) además de la pizza especial Suprema ($45). No sabemos cuál es el potencial de ingresos del establecimiento y tampoco el énfasis que se debería de dar a cada tipo de pizza para maximizar las ventas.

Antes de realizar el análisis debemos considerar las siguientes condiciones. Dada la capacidad de producción solo se puede elaborar 150 pizzas al día. Otra condición es que no se puede exceder de 90 pizzas tradicionales (Pepperoni y Vegetariana) y además, al no haber muchos vegetarianos en el área, estimamos vender un máximo de 25 pizzas vegetarianas al día. Otra condición a considerar es que solamente se puede comprar los ingredientes necesarios para producir 60 pizzas Suprema por día.

Con esta información se elabora la siguiente hoja de Excel **Tabla 2**; la forma o la manera de estructurar los datos del problema, no es estándar para ningún problema que se pueda resolver con la ayuda del Solver en el Excel, todo dependerá de las características del problema:

Tabla 2.

Estructuración de los datos del problema

E1 =B3+B7+B11

	A	B	C	D	E
1	**Precio Pepperoni:**	30		Ventas totales:	=B3+B7+B11
2	Pizzas a vender:	0			
3	Subtotal:	=B1*B2		**Restricciones**	
4				Máximo Total de pizzas:	150
5	**Precio Vegetariana:**	35		Máximo Tradicionales:	90
6	Pizzas a vender:	0		Máximo Vegetariana:	25
7	Subtotal:	=B5*B6		Máximo Suprema:	60
8					
9	**Precio Suprema:**	45		**Equivalencias**	
10	Pizzas a vender:	0		Total de pizzas:	=B2+B6+B10
11	Subtotal:	=B9*B10		Pizzas Tradicionales:	=B2+B6
12					

Fuente*:* (Excel Total, 2021)

Observa que en los datos están representadas todas las reglas de negocio del establecimiento.

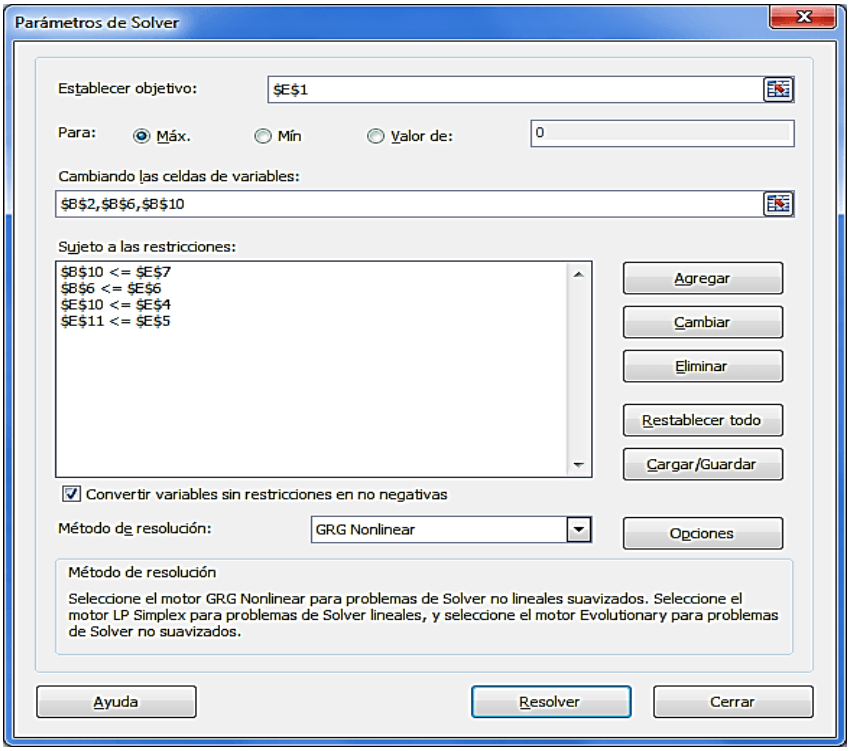
Para cada tipo de pizza se ha colocado el total de pizzas a vender (por ahora en cero, aunque es opcional la cantidad que se ponga), el subtotal de cada una, así como el total de ventas que está formado por la suma de los subtotales. Además, bajo el título Restricciones se ha colocado las condiciones previamente mencionadas.

Es muy importante establecer las equivalencias para las restricciones. Por ejemplo, una restricción es que el total de pizzas no puede exceder de 150, pero Excel no sabe lo que significa Total de pizzas, así que he destinado una celda para especificar que el total de pizzas es la suma de las celdas B2+B6+B10. Lo mismo sucede para explicar lo que significa Pizzas Tradicionales.

Los datos ya están listos para utilizar Solver, así que debes ir a la ficha Datos y hacer clic en el comando **Solver** donde se mostrará el cuadro de diálogo **Parámetros de Solver**. **Figura *7***

Figura 7.

Parámetros de Solver para el problema de las pizzas



Fuente: (Excel Total, 2021)

En el ejemplo lo que se quiere es maximizar, son las ventas totales por lo que en el cuadro de texto **Establecer objetivo (Figura 7)** está especificada la celda $E$1 y por supuesto seleccioné la opción Máx.

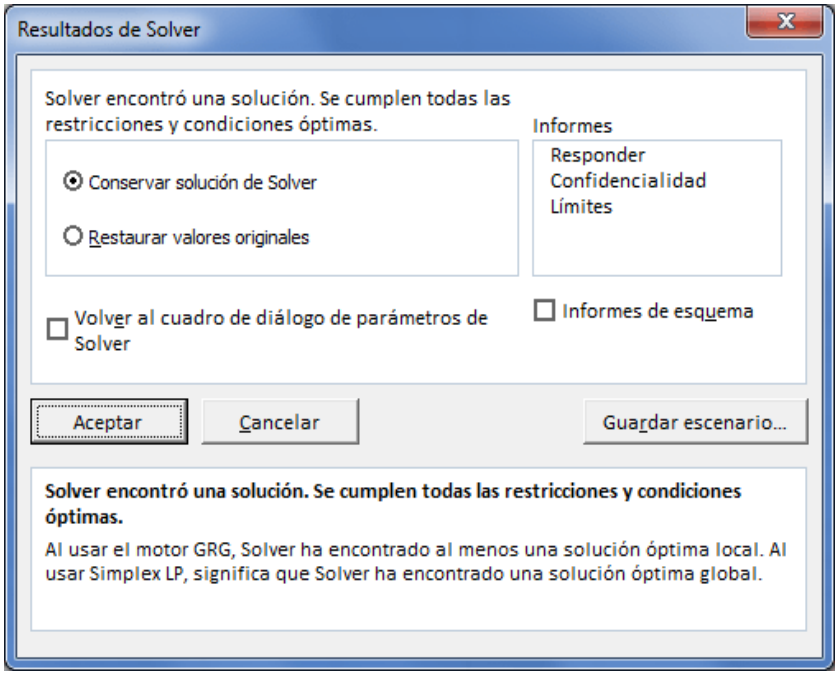
Otro parámetro importante son las celdas de variables, que en nuestro ejemplo son las pizzas a vender para cada uno de los diferentes tipos.

Finalmente observa cómo en el cuadro de restricciones, están reflejadas las condiciones de venta del establecimiento. Poner especial atención a la manera en que se han utilizado las equivalencias que son las celdas $E$10 y $E$11.

De esta manera todo está listo para continuar; solamente se debe hacer clic en el botón **Resolver** y Excel comenzará a calcular diferentes valores para las celdas variables hasta encontrar el valor máximo para las ventas totales. Al término del cálculo se mostrará el cuadro de diálogo *Resultados de Solver*. **Figura *8***

Figura 8.

Resultados de Solver



Fuente*:* (Excel Total, 2021)

Solamente haz clic en Aceptar para ver los resultados en la hoja de Excel. **Tabla 3**

Tabla 3.

Resultados maximizados por Solver

E1 | =B3+B7+B11

	A	B	C	D	E
1	**Precio Pepperoni:**	$ 30.00		Ventas totales:	$5,525.00
2	Pizzas a vender:	65			
3	Subtotal:	$1,950.00		**Restricciones**	
4				Máximo Total de pizzas:	150
5	**Precio Vegetariana:**	$ 35.00		Máximo Tradicionales:	90
6	Pizzas a vender:	25		Máximo Vegetariana:	25
7	Subtotal:	$ 875.00		Máximo Suprema:	60
8					
9	**Precio Suprema:**	$ 45.00		**Equivalencias**	
10	Pizzas a vender:	60		Total de pizzas:	150
11	Subtotal:	$2,700.00		Pizzas Tradicionales:	90
12					

Fuente*: (*Excel Total, 2021*)*

Excel ha hecho los cálculos para saber que, con las restricciones establecidas, se tiene un valor máximo en la venta total igual a $5525.

De aquí en adelante, fácilmente se podría cambiar los valores de las restricciones y volver a efectuar el cálculo con Solver, aplicando el procedimiento indicado, para observar el comportamiento en las ventas con los nuevos valores que se pueden obtener.

2.- Ejemplo obtenido de (Salazar_López, 2019): Un herrero con 80 Kg. de acero y 120 Kg. de aluminio quiere hacer bicicletas de paseo y de montaña que quiere vender, respectivamente a 20.000 y 15.000 pesos cada una para sacar el máximo beneficio. Para la de paseo empleará 1 Kg. de acero y 3 Kg. de aluminio, y para la de montaña 2 Kg. de ambos metales. ¿Cuántas bicicletas de paseo y de montaña deberá fabricar para maximizar las utilidades?

	Acero	Aluminio	Precio de Venta
Bicicleta de paseo (x)	1 kg	3 kg	$ 20.000
Bicicleta de montaña (y)	2 kg	2 kg	$ 15.000
Disponibilidad	80 kg	120 kg	

Declaración de variables

x = Cantidad de bicicletas de paseo a producir

y = Cantidad de bicicletas de montaña a producir

Restricciones de capacidad

Aluminio:

x + 2y <= 80

Acero:

3x + 2y <= 120

Función Objetivo

Zmax = 20000x + 15000y

Ingresando los datos a Excel

Tal cómo se mencionó, la importancia de una correcta organización de la información es vital, proponemos la siguiente **Tabla 4** para ingresar los datos de nuestro problema:

Tabla 4.

Estructura para ingreso de datos del problema

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2			Product Production Mix Example					
3								
4			Requerimientos de recursos por producto				Niveles de inventario	
5			Recurso	Bicicletas de paseo	Bicicletas de montaña		Inventario Disponible	Inv. Usado en el plan
6			Acero (kilogramos)					
7			Aluminio (kilogramos)					
8								
9								
10			Precio de venta por producto					
11				Bicicletas de paseo	Bicicletas de montaña			
12			Utilidad por unidad:					
13								
14			Decisiones de producción					
15				Bicicletas de paseo	Bicicletas de montaña			
16			Unidades a producir				Contribución Total	
17								

***Fuente**:* (Salazar_López, 2019)

El siguiente paso corresponde a registrar la información en la **Tabla 5**, de acuerdo a los datos que tenemos en el problema:

Tabla 5.

Datos registrados en la estructura propuesta

	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2			Product Production Mix Example					
3								
4			Requerimientos de recursos por producto				Niveles de inventario	
5			Recurso	Bicicletas de paseo	Bicicletas de montaña		Inventario Disponible	Inv. Usado en el plan
6			Acero (kilogramos)	1	2		80	0
7			Aluminio (kilogramos)	3	2		120	0
8								
9								
10			Precio de venta por producto					
11				Bicicletas de paseo	Bicicletas de montaña			
12			Utilidad por unidad:	$ 20.000	$ 15.000			
13								
14			Decisiones de producción					
15				Bicicletas de paseo	Bicicletas de montaña			
16			Unidades a producir	0	0		Contribución Total	$ -
17								

Fuente: (Salazar_López, 2019)

El siguiente paso consiste en formular la **Tabla 6**, para ello debemos considerar ¿qué pasaría si cambiaran las variables de decisión? Pues, en caso tal de que las variables sufrieran cambios se alteraría la contribución total, y el inventario de recursos. Por ello, debemos formular en consecuencia:

Tabla 6.

Formulación de las celdas, para obtener resultados esperados

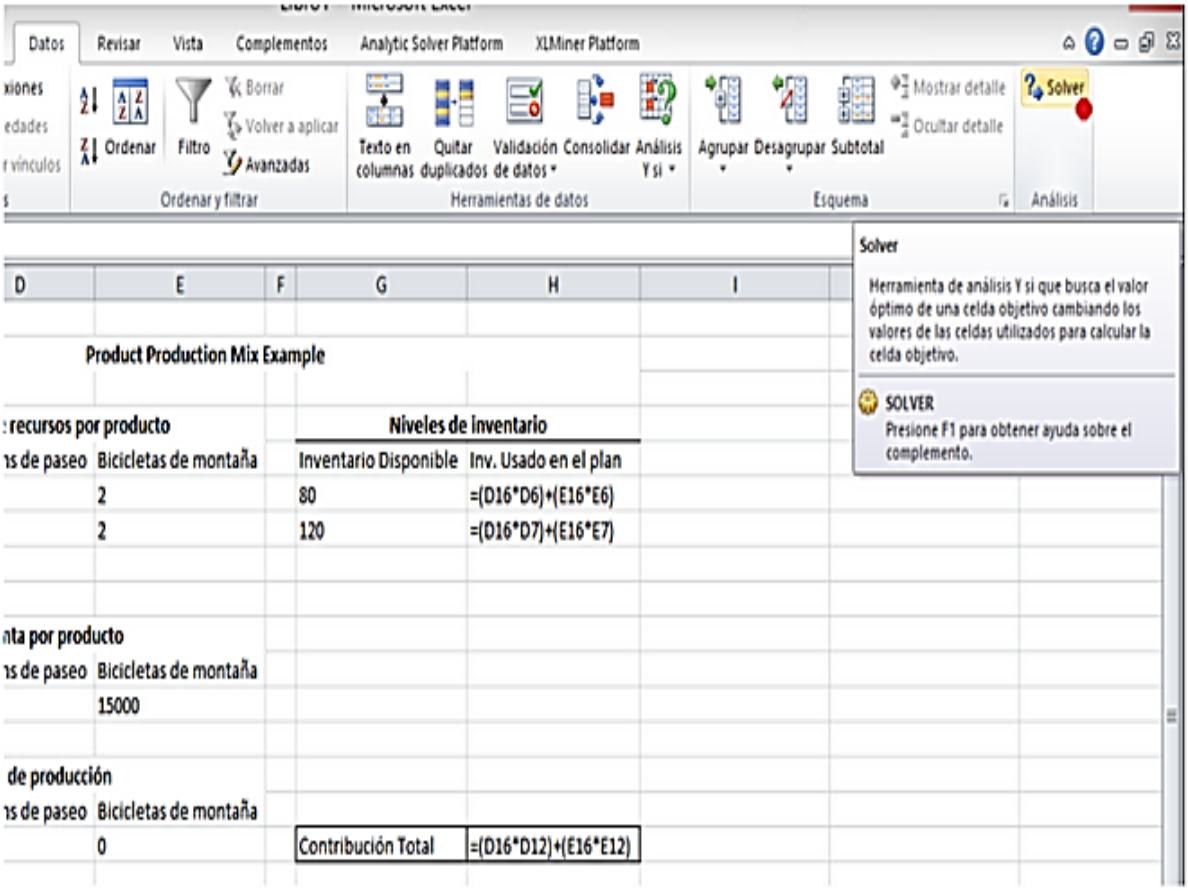
	A	B	C	D	E	F	G	H
1								
2			Product Production Mix Example					
3								
4			Requerimientos de recursos por producto				Niveles de inventario	
5			Recurso	Bicicletas de paseo	Bicicletas de montaña		Inventario Disponible	Inv. Usado en el plan
6			Acero (kilogramos)	1	2		80	=(D16*D6)+(E16*E6)
7			Aluminio (kilogramos)	3	2		120	=(D16*D7)+(E16*E7)
8								
9								
10			Precio de venta por producto					
11				Bicicletas de paseo	Bicicletas de montaña			
12			Utilidad por unidad:	20000	15000			
13								
14			Decisiones de producción					
15				Bicicletas de paseo	Bicicletas de montaña			
16			Unidades a producir	0	0		Contribución Total	=(D16*D12)+(E16*E12)
17								

Fuente: (Salazar_López, 2019)

Ahora que ya tenemos nuestra plantilla formulada, el siguiente paso consiste en utilizar Solver para resolver el modelo, para ello, vamos a la pestaña Datos (En cualquier versión de Office), y seleccionamos el complemento Solver **Figura 9**:

Figura 9.

Selección del Solver

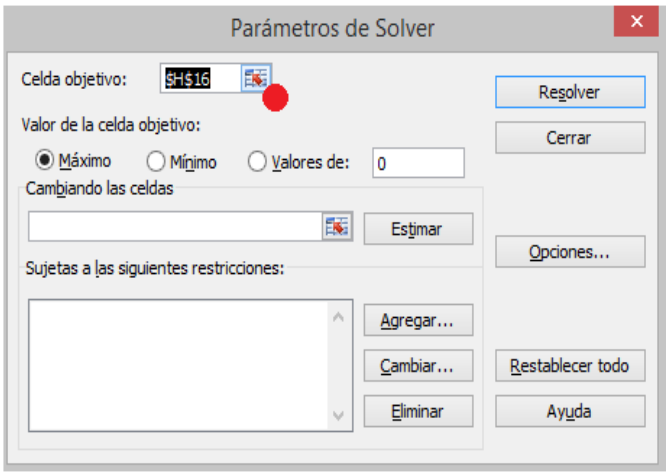


Fuente: (Salazar_López, 2019)

Una vez iniciemos Solver se abrirá una ventana emergente llamada Parámetros de Solver **Figura 10**, en ella como primera medida seleccionaremos nuestra celda objetivo (Contribución Total) y seleccionaremos el criterio Maximizar:

Figura 10.

Parámetros de Solver

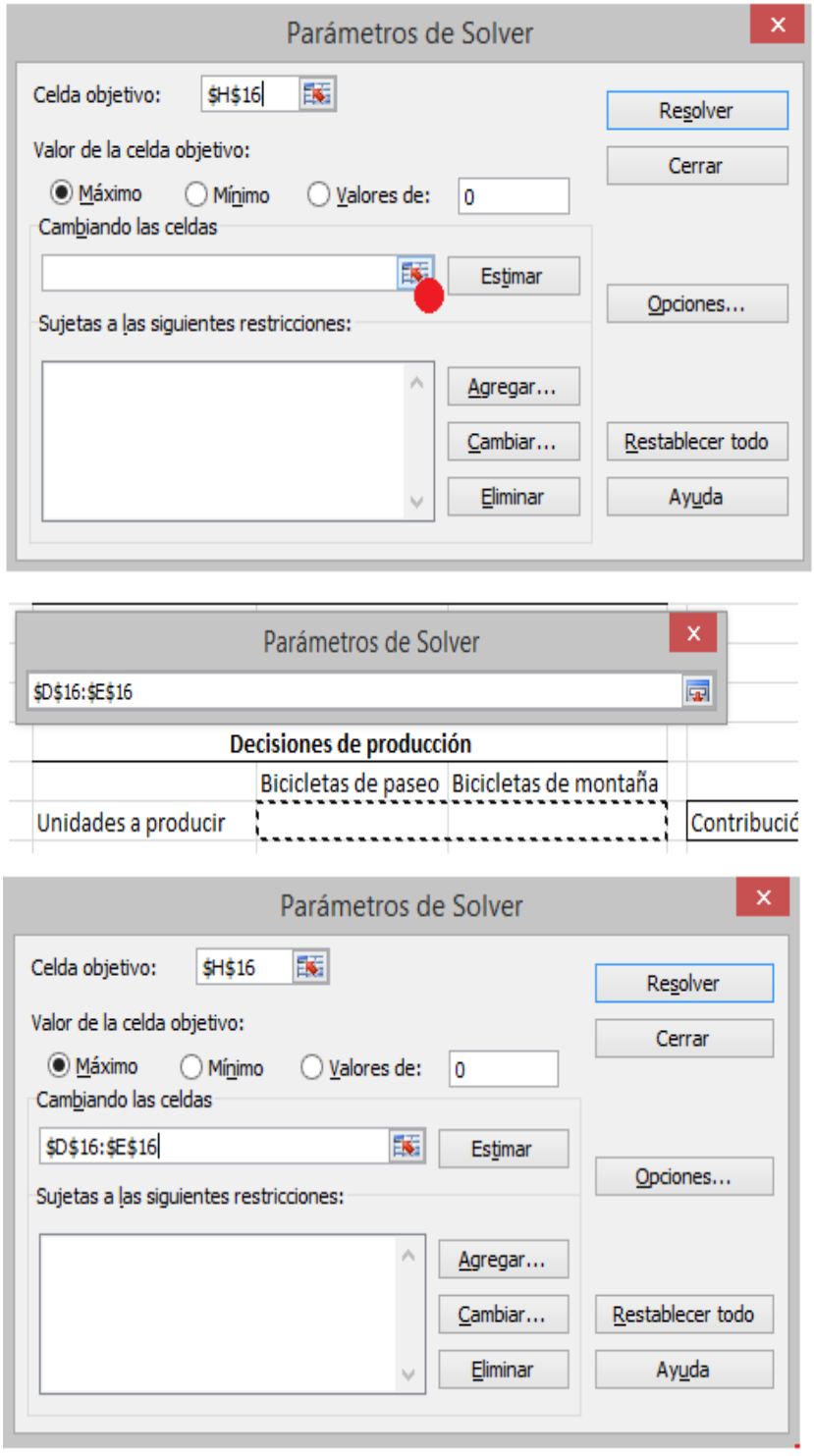


Fuente: (Salazar_López, 2019)

El siguiente paso, es indicarle a Solver que debe alcanzar el máximo valor para la celda objetivo *Figura 11* mediante la variación de las siguientes celdas (Cambiando las celdas), es decir, le indicaremos cuales son las variables de decisión:

Figura 11.

Selección de Máximo para la celda objetivo.

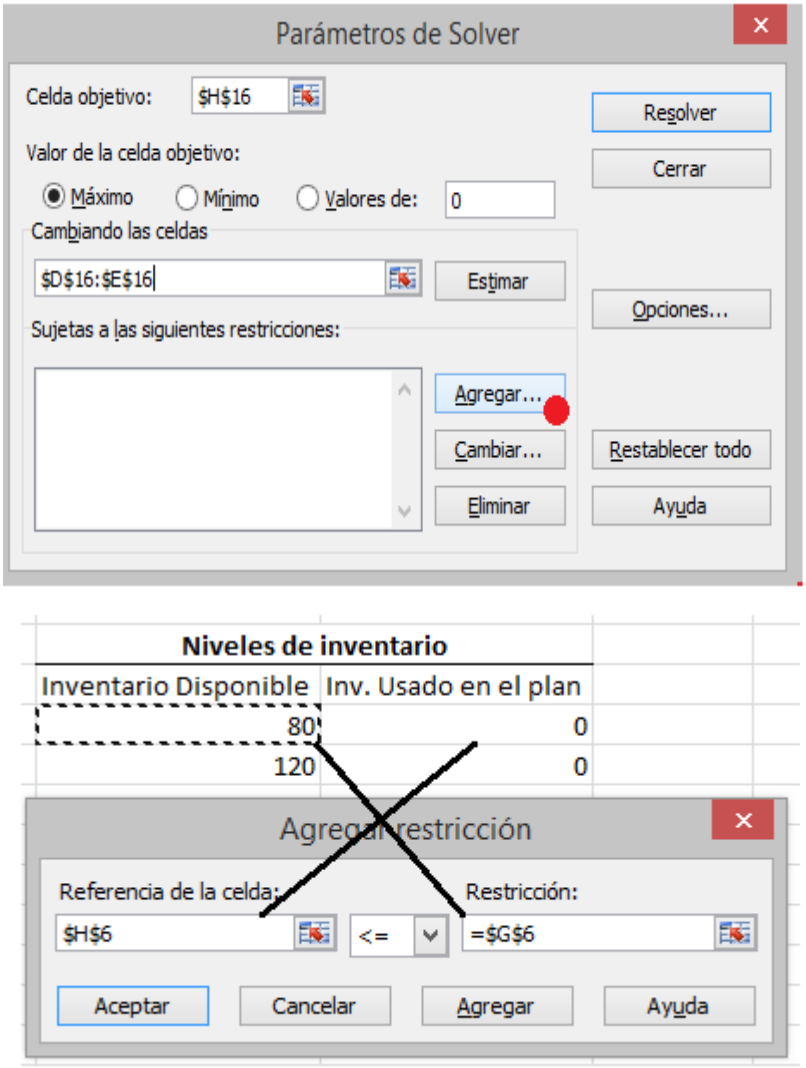


Fuente: (Salazar_López, 2019)

El siguiente paso **Figura 12** consiste en asignarle las restricciones a las que el modelo está sujeto, las cuales son restricciones de disponibilidad de recursos:

Figura 12.

Asignación de restricciones

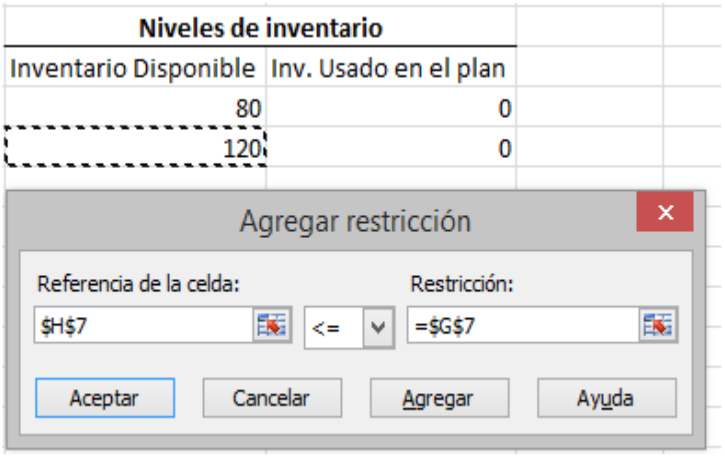


Fuente: (Salazar_López, 2019)

Lo que nos muestra la imagen anterior **Figura 12** es la forma de indicarle la restricción a Solver, para que el inventario usado sea menor o igual al inventario disponible. De igual forma debe hacerse para el recurso de Aluminio **Figura 13**.

Figura 13.

Asignación del recurso aluminio

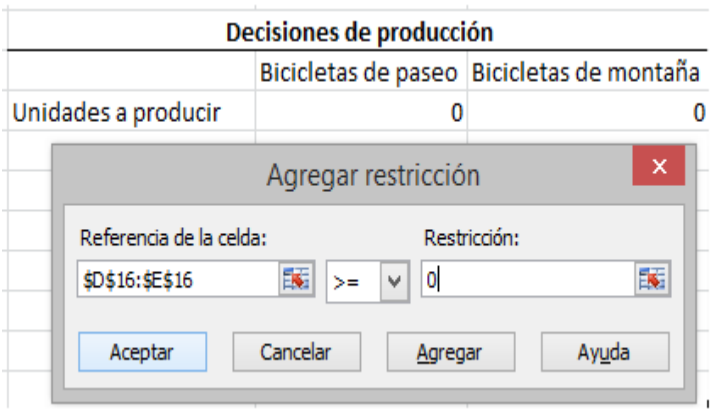


Fuente: (Salazar_López, 2019)

La siguiente restricción es la de no negatividad **Figura 14**, es decir, que las variables de decisión no puedan tomar valores menores que cero.

Figura 14.

Restricción de no negatividad

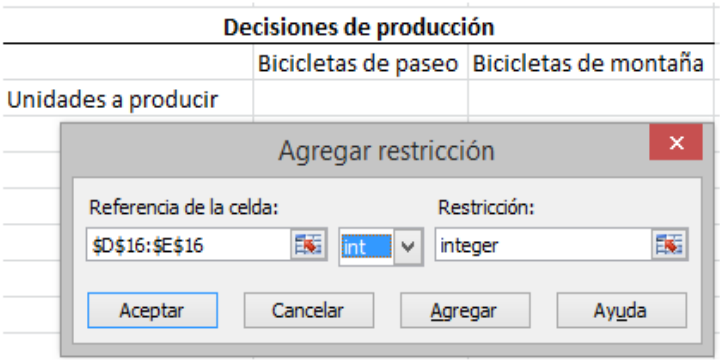


Fuente: (Salazar_López, 2019)

Si quisiéramos resolver el modelo tal cual como está pudiésemos hacerlo, y obtendríamos quizá una respuesta que distaría de su aplicación práctica, dado que es probable que la respuesta nos de variables continuas, y en la práctica vender 0,6 bicicletas es un poco complicado. Por tal razón, agregaremos una restricción que hace que el ejercicio se resuelva mediante programación lineal entera, indicando que las variables de decisión deban ser enteras ***Figura 15***:

Figura 15.

Variables de decisión enteras



Fuente: (Salazar_López, 2019)

Hecho esto, damos clic en Aceptar y en Resolver. Podemos observar cómo las variables de decisión, las restricciones (inventario usado) y la contribución total (celda objetivo) han tomado valores, estos son los valores óptimos según el modelo formulado **Tabla 7**.

Ahora nos aparecerá un cuadro de diálogo que nos preguntará si deseamos utilizar la solución de Solver y unos informes que debemos seleccionar para obtener una tabla resumen de la respuesta y un análisis de sensibilidad que se insertarán como hojas al archivo de Excel:

Tabla 7.

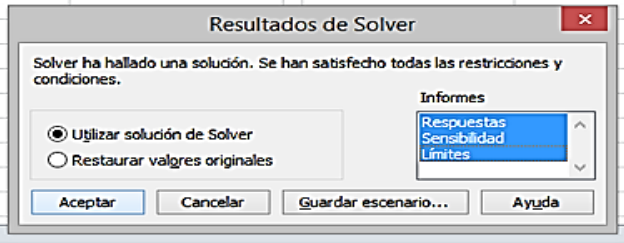
Resultados de Solver para el problema

Product Production Mix Example

Requerimientos de recursos por producto			Niveles de inventario	
Recurso	Bicicletas de paseo	Bicicletas de montaña	Inventario Disponible	Inv. Usado en el plan
Acero (kilogramos)	1	2	80	80
Aluminio (kilogramos)	3	2	120	120

Precio de venta por producto		
	Bicicletas de paseo	Bicicletas de montaña
Utilidad por unidad:	$ 20.000	$ 15.000

Decisiones de producción				
	Bicicletas de paseo	Bicicletas de montaña		
Unidades a producir	20	30	Contribución Total	$ 850.000



Fuente: (Salazar_López, 2019)

El informe de sensibilidad **Tabla 8** arrojado por Solver es mucho más básico que el que nos puede proporcionar WinQSB, sin embargo, destacamos la información referente al «Multiplicador de Lagrange» que corresponde al «Shadow Price de WinQSB» conocido como el precio sombra, es decir, el cambio marginal de la función objetivo cuando el valor del lado derecho de la restricción aumenta en una unidad, en este caso, por cada kg de Acero adicional que dispongamos, la función objetivo aumentaría en $ 1250.

Tabla 8.

Informe de sensibilidad del problema

Celdas cambiantes

Celda	Nombre	Valor Igual	Gradiente reducido
$D$16	Unidades a producir Bicicletas de paseo	20	0
$E$16	Unidades a producir Bicicletas de montaña	30	0

Restricciones

Celda	Nombre	Valor Igual	Multiplicador de Lagrange
$H$6	Acero (kilogramos) Inv. Usado en el plan	80	1250
$H$7	Aluminio (kilogramos) Inv. Usado en el plan	120	6250
$H$6	Acero (kilogramos) Inv. Usado en el plan	80	0
$H$7	Aluminio (kilogramos) Inv. Usado en el plan	120	0



Fuente: (Salazar_López, 2019)

CAPÍTULO DOS
PROGRAMACIÓN LINEAL: ANÁLISIS GRÁFICO

Introducción

El uso de la geometría como un sistema gráfico permite graficar elementos importantes de los problemas de la PL y como se optimiza con Solver.

Con este método de graficación es sencillo resolver un modelo de PL; en la realidad se tiene más de dos variables de decisión, con el método gráfico no se resuelve todos los casos, pero es una buena base intuitiva que servirá como fundamento para su uso en la PL.

Graficación de desigualdades y contornos

Procedimiento general para el trazo de gráficos de desigualdades (Eppen, Gould, Schmidt, Moore, & Weatherford, 2000):

- Paso 1: Gráfico de la igualdad. Convierta la desigualdad en una igualdad y trace el gráfico de la recta que representa esa ecuación.

Por ejemplo:

Primero tracemos el conjunto de puntos (x_1, x_2) que satisfaga la desigualdad

$2x_2 – x_1 \leq -2$ (1)

la igualdad es $2x_2 – x_1 = –2$

Para el gráfico de la ecuación ***Figura 16***; la forma de hacerlo es:

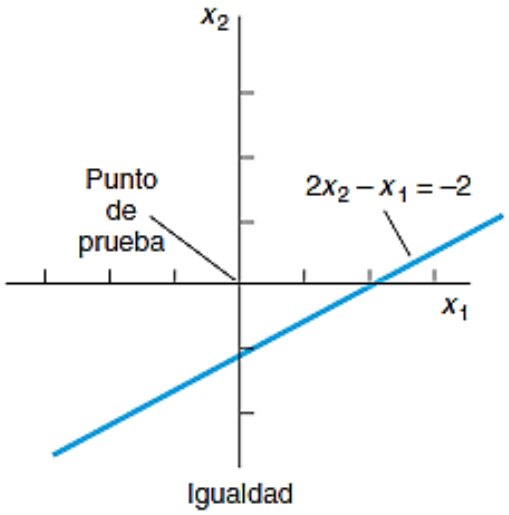
(a) Sea $x_1 = 0$, resuelva para x_2 en ($x_2 = – 2/2 = -1$) y localice ese punto en el eje x_2.

(b) Sea $x_2 = 0$, resuelva para x_1 en ($–x_1 = –2$; $x_1 = 2$) y localice ese punto sobre el eje x_1.

(c) Una los dos puntos.

Figura 16.

Gráfico de la ecuación

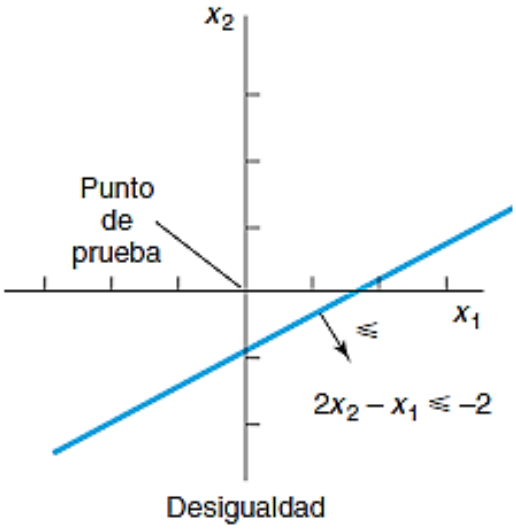


Fuente*:* (Eppen, Gould, Schmidt, Moore, & Weatherford, 2000)

- Paso 2: Escoja un punto de prueba. Elija cualquier punto, que le llamaremos de prueba, que no esté sobre la línea. Sea el punto de prueba $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ no está sobre la recta, puede ser un punto conveniente. Véase ***Figura 17***.

Figura 17.

Punto de prueba



Fuente: (Eppen, Gould, Schmidt, Moore, & Weatherford, 2000)

- Paso 3: Resuelva la expresión del lado izquierdo. Sustituya el punto de prueba en la expresión del lado izquierdo de la desigualdad. En el ejemplo, la expresión es $2x_2 - x_1$.

Sustituyendo en la expresión $2x_2 – x_1$, por los valores $x_1 = 0$, $x_2 = 0$ obtenemos un valor numérico de cero.

- Paso 4: Determine si el punto de prueba satisface la desigualdad.

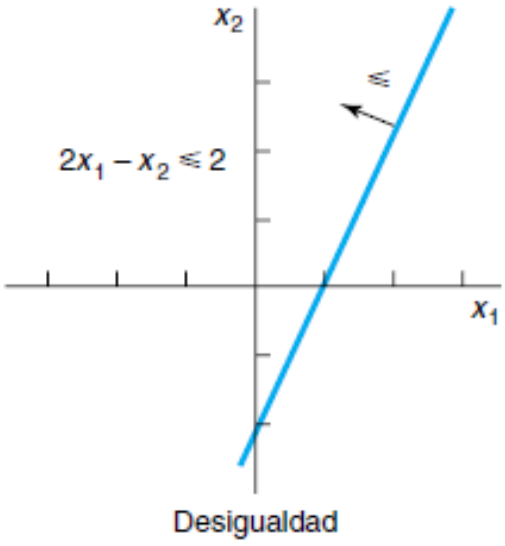
a. Si el punto de prueba satisface la desigualdad original, entonces la recta trazada en el paso 1 y todos los puntos que están al mismo lado de la recta que el punto de prueba satisfacen la desigualdad.

b. Si el punto de prueba no satisface la desigualdad original, entonces la recta y todos los puntos que no están en el mismo lado que el punto de prueba satisfacen la desigualdad.

En el ejemplo, como 0 no es ≤ -2, el punto de prueba no satisface la desigualdad. Cumpliéndose la condición b, la línea recta y todos los puntos del lado opuesto de la línea con respecto a (0, 0) satisfacen la desigualdad. Este conjunto se muestra en la ***Figura 18***.

Figura 18.

El punto de prueba no cumple con la desigualdad



Fuente: (Eppen, Gould, Schmidt, Moore, & Weatherford, 2000)

Observe la convención de señalar el lado relevante de la línea de igualdad con una flecha y ≤ o ≥, según el caso.

Es frecuente que los estudiantes se formen la impresión equivocada de que el lado < del gráfico de una desigualdad siempre está debajo de la línea de igualdad. Por eso, para trazar el gráfico de los puntos que satisfacen una relación ≤ cambian el ≤ por =, grafican la

igualdad y luego, apresuradamente, incluyen todos los puntos que están debajo de la línea de igualdad.

Esto puede ser incorrecto, ya que el lado < podría estar arriba y no abajo. Por ejemplo, tracemos el gráfico de la desigualdad $2x_1 – x_2 \leq 2$.

Siguiendo el procedimiento antes descrito, trazamos primero el gráfico de la ecuación $2x_1 – x_2 = 2$ como muestra la ***Figura 16***. Ahora el punto de prueba (x1 = 0, x2 = 0), está arriba de la línea. En este punto $2x_1 – x_2 = 2(0) – 0 = 0$ y como 0 es menor que 2, hemos identificado el lado < de la línea que aparece en la ***Figura 17***.

Por tanto, en este caso, los puntos que satisfacen la desigualdad ≤ son los puntos que están sobre la recta y todos los puntos que se localizan del mismo lado que el punto (x1 = 0, x2 = 0), es decir, los puntos que están en la recta y arriba de ella. Esto se ilustra también en la ***Figura 17***.

Una comparación entre la ***Figura 17*** y la ***Figura 18*** muestra que no existe una relación general entre el sentido de la desigualdad (es decir, ≤ o ≥) y el lado que se encuentra arriba o abajo del gráfico de la igualdad. Siempre será posible localizar el lado apropiado mediante el uso de un punto de prueba.

La técnica descrita es fundamental para trazar el gráfico de las restricciones de cualquier PL, porque las restricciones siempre son igualdades o desigualdades matemáticas.

En resumen, para trazar el gráfico de una restricción de desigualdad, ya sea del tipo ≤ o ≥, aplicar las indicaciones a continuación:

1. Cambie la desigualdad por una igualdad, para obtener una ecuación, y trace el gráfico de la recta que representa dicha ecuación.
2. Escoja cualquier punto de prueba que no esté sobre esta recta.
   (Si el punto [x1 = 0, x2 = 0] no está sobre la recta, ése es el punto de prueba más sencillo.)
3. Sustituya este punto de prueba en el lado izquierdo de la restricción de desigualdad.

Por el hecho de que el punto de prueba no se encuentra sobre la recta, el resultado es menor que el lado derecho o mayor que el lado derecho.

Si el resultado es menor que el lado derecho, entonces la recta y todos los puntos localizados en el lado donde se encuentra el punto de prueba satisfacen la desigualdad ≤ y la recta y todos los puntos del otro lado satisfacen la desigualdad ≥.

Si el resultado es mayor que el lado derecho, entonces la conclusión es la inversa.

Líneas de contorno

A los contornos se les conoce también como isocuantas, son fundamentales en la representación geométrica de modelos en PL.

Un contorno en una función f de dos variables es el conjunto de todos los pares (x_1, x_2) para los cuales f (x_1, x_2) adopta cierto valor constante específico.

Cuando f es función de las ganancias, los contornos suelen denominarse rectas de isoganancias y cuando f una función de los costos, los contornos representan rectas de isocostos.

Ejemplo de contorno, supongamos la venta de dos productos.

La ganancia por cada unidad del producto 1 es $2, y la ganancia por unidad del producto 2 es $4. La ganancia total procedente de la venta de x_1 unidades del producto 1 y x_2 unidades del producto 2 se expresa por medio de una función f de dos variables, definida por ganancias = f (x1, x2) = $2x_1 + 4x_2$

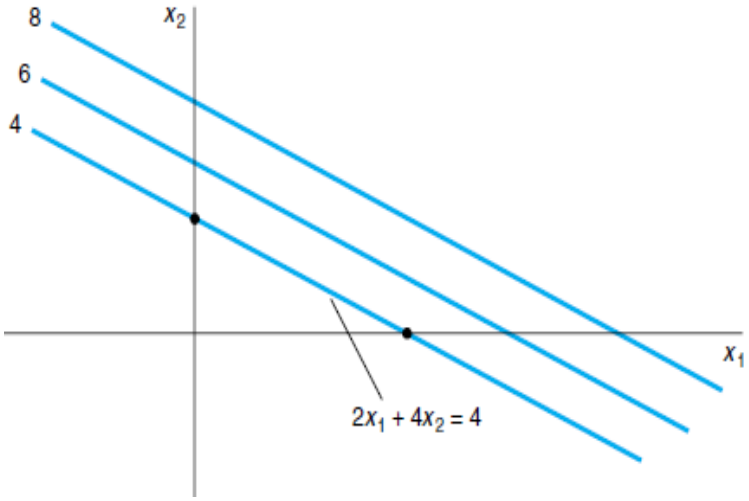
Grafiquemos ahora todas las posibles combinaciones de ventas de x_1 y x_2 para las cuales obtenemos $4 de ganancia. Para eso, trazamos el gráfico de la ecuación ***Figura 19***

$2x_1 + 4x_2 = 4$ (2)

Esta recta se conoce como el contorno 4 de la función f.

Figura 19.

Gráfica de ejemplo



Fuente: (Eppen, Gould, Schmidt, Moore, & Weatherford, 2000)

Las ventas negativas no tienen sentido, nos interesa la parte del contorno 4 que se encuentra entre los dos puntos señalados sobre los ejes en la ***Figura 19***.

Se puede sustituir el valor 4 en el lado derecho de la expresión (2) con cualquier otra constante y después graficar el resultado para obtener un contorno diferente de f.

La ***Figura 19*** muestra también otros dos contornos de f, cuyos valores correspondientes son 6 y 8 en el lado derecho de la expresión (2). Los contornos son rectas paralelas y de esto se deduce que existe un número infinito de contornos, uno para cada posible valor numérico ubicado del lado derecho de la expresión (2).

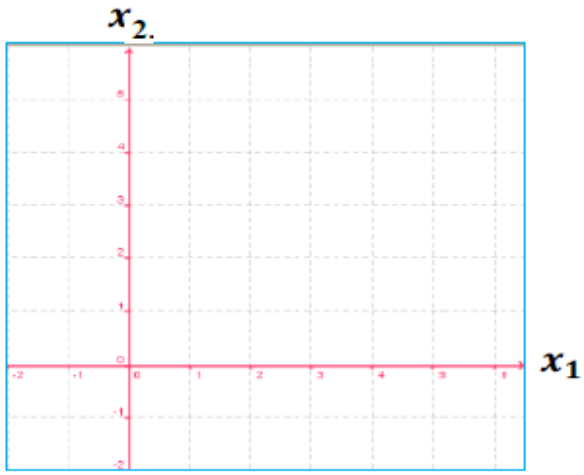
Resumiendo, la graficación de desigualdades o contornos se reducen a la graficación de igualdades y después a la identificación del lado correcto.

El método de resolución gráfica

De acuerdo a (Valencia, 2018), la resolución de problemas lineales mediante el método gráfico solamente se realizará cuando en la formulación existan dos variables, debido a que el método utiliza el eje de coordenadas del plano cartesiano, donde el ***eje de las abscisas representa a*** $(x1)$ y el eje de las **ordenadas *representa a*** $(x2)$ que corresponden a las variables de decisión del problema.

Figura 20.

Sistema cartesiano



Fuente: (Valencia, 2018)

Para resolver por el método gráfico, vamos a partir de conceptos como son: definición de variables, función objetiva, restricciones, no negación, etc.:

1. **Definición de variables**: Como primer paso para modelar un problema de optimización, se debe distinguir qué variables son las que sobre las que se va a tomar decisiones en el problema.

Las variables se pueden identificar en las preguntas del problema y generalmente se designan con letras sub-indizadas. Cada variable debe presentar una cantidad que corresponda a una misma unidad de medida (utilidad, horas, artículos, precios, entre otros).

$$x_1, x_2, x_3, \dots x_n = \textit{Variables del problema.}$$

2. **Determinación de la función objetiva**: Es una expresión matemática que representa el objeto planteado, expresada mediante una función lineal que combina a las variables discretas de la pregunta del problema; que puede generar un mayor cuando se trata de maximizar por ejemplo beneficios y en un menor valor cuando se trata de minimizar por ejemplo los costos.

$$Z(\max o \min) = c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 + \cdots + c_nx_n$$

Donde:

$z(\max o \min)$ =Función Objetiva del problema (F.O.)

$c_1,\ c_2,\ c_3,\ c_n$ = Coeficientes unitarios que acompañan a las variables en la F.O. (beneficios, costos, precios, entre otros)

$x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_n$= Variables del problema, donde se quiere llegar.

3. **Planteamiento de las restricciones**: Representan las condiciones y/o recursos, que contiene el problema y se muestran por medio de desigualdades de tipo lineal, ya sean estas: físicas, económicas, técnicas, entre otras.

$$\left|\begin{array}{ccccccccccc}
A_{11}x_1 & + & A_{12}x_2 & + & A_{13}x_3 & + & \dots & + & A_{1n}x_n & T_1 & B_1 \\
A_{21}x_1 & + & A_{22}x_2 & + & A_{23}x_3 & + & \dots & + & A_{2n}x_n & T_2 & B_2 \\
A_{31}x_1 & + & A_{32}x_2 & + & A_{33}x_3 & + & \dots & + & A_{3n}x_n & T_3 & B_3 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots \\
A_{m1}x_1 & + & A_{m2}x_2 & + & A_{m3}x_3 & + & \dots & + & A_{mn}x_n & T_n & B_n
\end{array}\right|$$

Donde:

A_{ij}= Coeficiente que acompaña a las variables en las restricciones.

x_1, x_2, x_3, x_n= Variables de decisión del problema

T_1, T_2, T_3, T_n= Signo de restricción del problema $(\geq, \leq, =)$

B_1, B_2, B_3, B_n= Disponibilidad del problema

Para la asignación de los signos, con respecto a la disponibilidad, no pueden tener una desigualdad estricta con los signos ≥ o ≤, deben ser con los signos ≥, ≤ o =.

Las restricciones tienen signo ≤ cuando se trata de maximización y ≥ cuando se trata de minimización; no es una regla general, pero se pueden identificar en los signos de las restricciones mediante la terminología en los enunciados tales como:

Para ≥: mayor igual a, al menos, por lo menos, como mínimo, un mínimo de, otros similares.
Para ≤: menor igual a, a lo mucho, cuando mucho, como máximo, no más de, otros similares.
Para =: igual a, únicamente, un total de, otros similares.

4. **Condiciones de no negatividad**: Son restricciones adicionales que indican que las soluciones obtenidas deben ser siempre positivas, es decir, mayores o igual a cero.

$$X_n \geq 0$$

5. **Condiciones de optimización**: Es la utilización de algún método para la resolución del problema, y que ayudarán a interpretar la solución:

- ✓ Método gráfico.
- ✓ Método simplex primal.
- ✓ Método simplex dual.
- ✓ Modelo de transporte.

6. **Región factible**: Es un recinto convexo acotado (poligonal) o no acotado; zona o región formada por la intersección de todas las inecuaciones graficadas una por una.

Se trata de buscar en esa región o zona los puntos que determinen el valor de la función objetivo como máximo o mínimo, según sea el problema.

7. **Hallar las coordenadas de los vértices de la región factible**: Se señala los vértices de la región factible, con letras mayúsculas del abecedario, y se resuelven las restricciones que cortan en cada vértice para poder encontrar los puntos de intersección de las rectas.

A los puntos se les denomina soluciones factibles y las soluciones factibles que optimizan la función objetiva (máxima o mínima), se llaman soluciones óptimas.

8. **Determinación gráfica del punto óptimo:** Se representa el vector director de la recta dada por la ecuación de la función objetivo, $F(x_1, x_2) = Ax_1 + Bx_2$, que hay que maximizar o minimizar.

El vector director de la recta $Ax_1 + Bx_2$ viene dado por $\boldsymbol{v}(-\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$. Además, lo único que importa es la dirección del vector y no su módulo (longitud), podemos dividir a las coordenadas del vector si los números son muy grandes, puesto que vectores con coordenadas proporcionales tienen la misma dirección.

Luego, se trazan rectas paralelas a este vector que pasen por los vértices de la región factible (si es acotada), o por todo el borde de la región factible (cuándo no es acotada) y se observa en qué vértice la función F se hace máxima (o mínima) sin más que tener en cuenta cuál de las rectas tiene mayor (o menor) ordenada en el origen, es decir, ***qué recta corta en un punto mayor o menor al eje y o x_2.***

9. **Determinación algebraica del punto óptimo:** Simplemente, sustituimos cada uno de los vértices de la región factible en la función objetivo, dando la solución óptima por el mayor valor en el caso de maximización, o el menor en el caso de minimización.

10. **Interpretación de la solución lógica:** Consiste en hacer un informe de los resultados encontrados para su respectiva implementación.

11. **Comprobación:** La solución óptima debe satisfacer todo el sistema de inecuaciones con la función objetivo.

Tipos de soluciones por el método gráfico

Un problema de PL puede tener una, infinitas o ninguna solución ***Figura 21***, verificándose la siguiente propiedad:
Si hay una única solución óptima, esta se encuentra en un vértice de la región factible,
Si hay infinitas soluciones óptimas, se encontrarán en un lado de la región factible.
Es posible que no haya solución óptima, pues cuando el recinto es no acotado, la función objetivo puede crecer o decrecer indefinidamente.

Figura 21.

Tipos de solución



Fuente: (Valencia, 2018)

Solución óptima única acotada

Esta solución es la de mayor utilidad en problemas reales de PL, y la solución óptima única se encuentra en un vértice de la región factible.

Ejemplos: Resolver por el método gráfico los siguientes problemas (Valencia, 2018, p. 52):

1. Una fábrica produce dos tipos de productos A y B; el primero requiere la utilización de 7kg de materia prima, 2 horas/hombre de mano de obra, y 4,5 horas/máquina de utilización de maquinaria. El segundo requiere 3kg de materia prima, 3 horas/hombre de mano de obra y 4 horas/máquina de utilización de maquinaria. La empresa cuenta para la fabricación de productos con los siguientes recursos: 21kg de materia prima, 12 horas/hombre de mano de obra y 18 horas/máquina. ¿Cuál es la combinación óptima de producción que maximice el beneficio, suponiendo que la fábrica estima ganar $15 por cada unidad de producto A y $ 11 por cada unidad del producto B?

1.- Definición de variables:

x_1 = Producto A

x_2 = Producto B

2.- Función objetiva: $Z(max)$ = 15x_1 + 11x_2

3.-Restricciones:

RECURSOS	VARIABLES		DISPONIBILIDAD
	x_1	x_2	
Materia prima	7 kg	3 kg	21 kg
Mano de obra	2h/H	3h/H	12 h/H
Utilización maquinaria	4,5 h/m	4h/m	18 h/m
Beneficio	$15	$11	

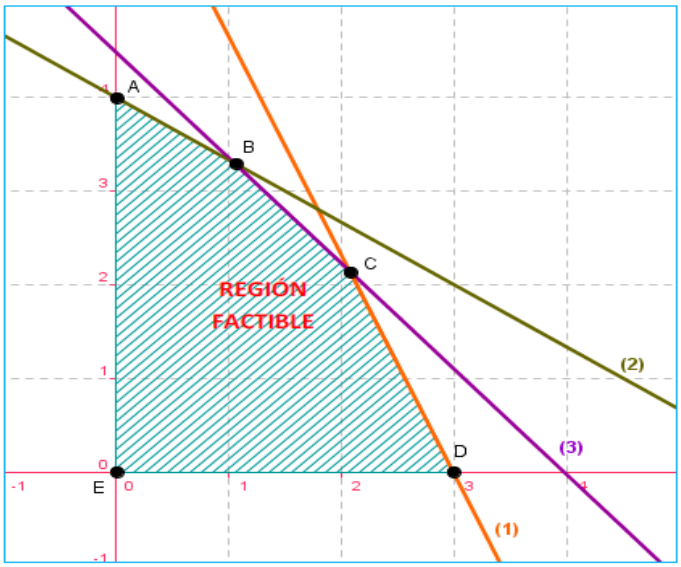
$$\begin{cases} 7x_1 + 3x_2 \leq 21 & (1) \\ 2x_1 + 3x_2 \leq 12 & (2) \\ 4{,}5x_1 + 4x_2 \leq 18 & (3) \end{cases}$$

4.- No negación: $x_1, x_2 \geq 0$

Cálculo de los puntos para graficar cada inecuación:

Inecuación # 1	Inecuación # 2	Inecuación # 3
$7x_1 + 3x_2 \leq 21$ $3x_2 \leq 21 - 7x_1$ $x_2 \leq \frac{21 - 7x_1}{3}$	$2x_1 + 3x_2 \leq 12$ $3x_2 \leq 12 - 2x_1$ $x_2 \leq \frac{12 - 2x_1}{3}$	$4{,}5x_1 + 4x_2 \leq 18$ $4x_2 \leq 18 - 4{,}5x_1$ $x_2 \leq \frac{18 - 4{,}5x_1}{4}$
Tabla de valores	**Tabla de valores**	**Tabla de valores**
x_1 | x_2 0 | 7 3 | 0	x_1 | x_2 0 | 4 6 | 0	x_1 | x_2 0 | 4,5 4 | 0

Gráfica de la región factible



Cálculo de los vértices:

Coordenada A	Coordenada B	Coordenada C
Se obtiene de la gráfica $A = (0, 4)$	**Recta 2 y 3** $2x_1 + 3x_2 = 12 \quad (-4)$ $4{,}5x_1 + 4x_2 = 18 \quad (3)$ $-8x_1 - 12x_2 = -48$ $13{,}5x_1 + 12x_2 = 54$ $5{,}5x_1 = 6$ $x_1 = \frac{6}{5{,}5}$ $x_1 = 1{,}09$ **Reemplazamos en 2** $2x_1 + 3x_2 = 12$ $2(1{,}09) + 3x_2 = 12$ $2{,}18 + 3x_2 = 12$ $x_2 = \frac{12 - 2{,}18}{3}$ $x_2 = 3{,}27$ $B(1{,}09; 3{,}27)$	**Recta 1 y 3** $7x_1 + 3x_2 = 21 \quad (-4)$ $4{,}5x_1 + 4x_2 = 18 \quad (3)$ $-28x_1 - 12x_2 = -84$ $13{,}5x_1 + 12x_2 = 54$ $-14{,}5x_1 = -30$ $x_1 = \frac{-30}{-14{,}5}$ $x_1 = 2{,}06$ **Reemplazamos en 1** $7x_1 + 3x_2 = 21$ $7(2{,}06) + 3x_2 = 21$ $3x_2 = \frac{21 - 14{,}42}{3}$ $x_2 = \frac{6{,}58}{3}$ $x_2 = 2{,}19$ $C(2{,}06; 2{,}19)$
Coordenada D		
Se obtiene de la gráfica $D = (3, 0)$		
Coordenada E		
Se obtiene de la gráfica $E = (0, 0)$		

Determinación gráfica del punto óptimo:

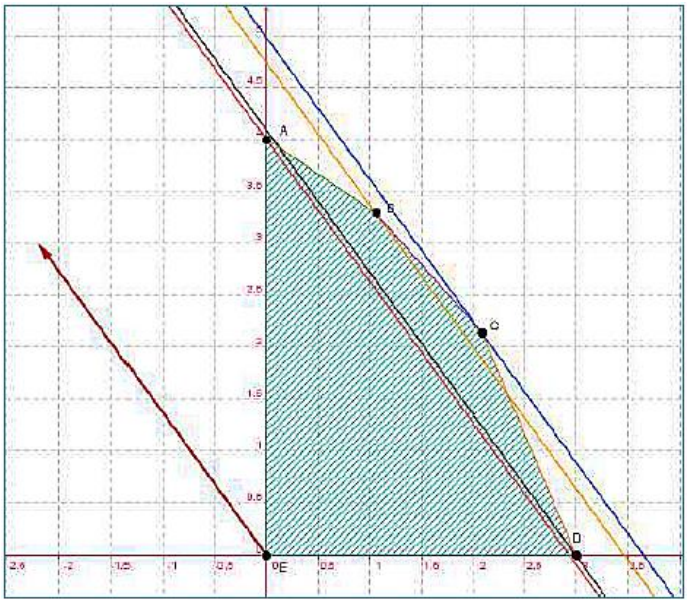
Se grafica el vector: $\boldsymbol{v}$ $(-\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$, con los coeficientes de la función objetivo

$Z(max)$ = 15X_1 + 11X_2

$\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{-11}; \boldsymbol{15})$, por motivos de la escala dividimos al vector para cinco, entonces tenemos:

$\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{-2,2}; \boldsymbol{3})$

El vector lo trazamos desde el origen P (0;0); al trazar rectas paralelas al vector desde cada vértice, observamos que la recta paralela que corta en el eje *y*, con mayor valor se inicia desde el punto C, como el ejercicio nos dice maximizar nuestra respuesta es el punto C. Si fuera minimización escogemos la recta paralela con menor valor en el eje y.



La solución gráfica del punto óptimo es: $\boldsymbol{C}(\boldsymbol{2}, \boldsymbol{06}; \boldsymbol{2}, \boldsymbol{19})$.

Determinación algebraica del punto óptimo:

$P(x_1, x_2)$	$15x_1$	$11x_2$	Z
$A(0,4)$	15(0)	11(4)	44
$B(1,09; 3,27)$	15(1,09)	11(3,27)	52,32
$C(2,06; 2,19)$	15(2,06)	11(2,19)	54,99
$D(3,0)$	15(3)	11(0)	45
$E(0,0)$	15(0)	11(0)	0

PUNTO MÁXIMO

Interpretación:

La empresa debe fabricar 2,06 unidades del producto A y 2,19 unidades del producto B para obtener un máximo beneficio de $54,99.

Comprobación:

Inecuación # 1	Inecuación # 2	Inecuación # 3
$7x_1 + 3x_2 \leq 21$ $7(2) + 3(2) \leq 21$ $14 + 6 \leq 21$ $20 \leq 21$ Verdadero	$2x_1 + 3x_2 \leq 1$ $2(2) + 3(2) \leq 12$ $4 + 6 \leq 12$ $10 \leq 12$ Verdadero	$4{,}5x_1 + 4x_2 \leq 18$ $4{,}5(2) + 4(2) \leq 18$ $9 + 8 \leq 18$ $17 \leq 18$ Verdadero

2. La empresa TECNOLOGYRV fabricante de computadores produce dos modelos, A y B. Para ello dispone de dos sucursales S1 y S2. En la S1 se producen diariamente 4 computadores tipo A y 7 computadores tipo B, con un coste de $ 12 diarios. En S2 se producen 5 de A y 2 de B, con un coste de $ 8 diarios. Además, quiere que lo invertido en la sucursal S1 sea, a lo mucho, igual a lo invertido en la sucursal S2. Para abastecer el mercado, se han de poner a la venta máximo 20 computadores de tipo A y al menos 14 de tipo B. ¿Cuántos días debe funcionar cada sucursal para que el coste sea mínimo? ¿Cuál es ese costo?

Datos del problema

VARIABLES:

x_1 = Número de días que debe funcionar S1.
x_2 = Número de días que debe funcionar S2.

FUNCIÓN OBJETIVO:

Minimizar: $Z = 12x_1 + 8x_2$

RESTRICCIONES:

$$\begin{cases} 4x_1 + 5x_2 \leq 20 & (1) \\ 7x_1 + 2x_2 \geq 14 & (2) \\ x_1 \leq x_2 & (3) \end{cases}$$

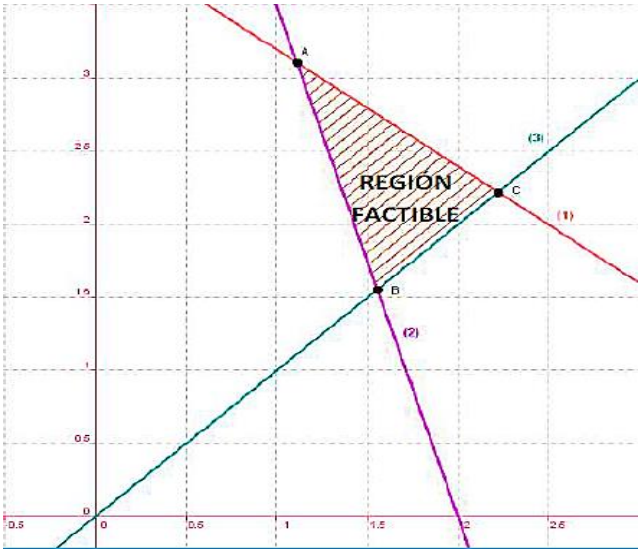
No negación: $x_1, x_2 \geq 0$

Cálculo de los puntos para graficar cada inecuación.

Inecuación # 1	Inecuación # 2	Inecuación # 3
$4x_1 + 5x_2 \leq 20$ $5x_2 \leq -4x_1 + 20$ $x_2 \leq \frac{-4x_1 + 20}{5}$	$7x_1 + 2x_2 \geq 14$ $2x_2 \geq -7x_1 + 14$ $x_2 \geq \frac{-7x_1 + 14}{2}$	$x_1 \leq x_2$ $x_2 \geq x_1$ *Recta que pasa por el origen*

Tabla de valores		Tabla de valores		Tabla de valores	
x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
0	4	0	7	0	0
5	0	2	0	2	2

Gráfica de la región factible:



Cálculo de los vértices:

Coordenada A	Coordenada B	Coordenada C
Recta 1 y 2 $\mathbf{4x_1 + 5x_2 = 20\ (7)}$ $\mathbf{7x_1 + 2x_2 = 14\ (-4)}$ $\mathbf{28x_1 + 35x_2 = 140}$ $\mathbf{-28x_1 - 8x_2 = -56}$ $\mathbf{27x_2 = 84}$ $\mathbf{x_2 = \frac{84}{27}}$ $\mathbf{x_2 = 3.1}$	Recta 2 y 3 $7x_1 + 2x_2 = 14$ $x_1 - x_2 = 0\ \ (-7)$ $7x_1 + 2x_2 = 14$ $-7x_1 + 7x_2 = 0$ $9x_2 = 14$ $x_2 = \frac{14}{9}$ $x_2 = 1.56$	Recta 1 y 3 $4x_1 + 5x_2 = 20$ $x_1 - x_2 = 0\ \ (-4)$ $4x_1 + 5x_2 = 20$ $-4x_1 + 4x_2 = 0$ $9x_2 = 20$ $x_2 = \frac{20}{9}$ $x_2 = 2.22$
Reemplazamos en 1 $\mathbf{4x_1 + 5x_2 = 20}$ $\mathbf{4x_1 + 5(3,1) = 20}$ $\mathbf{4x_1 = 20 - 15,5}$ $\mathbf{x_1 = \frac{4,5}{4}}$ $\mathbf{x_1 = 1.1}$ $\boldsymbol{A = (1.1; 3.1)}$	Reemplazamos en 2 $7x_1 + 2x_2 = 14$ $7x_1 + 2(1,56) = 14$ $7x_1 = 14 - 3,12$ $x_1 = \frac{10,88}{7}$ $x_1 = 1.56$ $\boldsymbol{B = (1.56; 1.56)}$	Reemplazamos en 1 $4x_1 + 5x_2 = 20$ $4x_1 + 5(2,22) = 20$ $4x_1 = 20 - 11,10$ $x_1 = \frac{8,9}{4}$ $x_1 = 2.22$ $\boldsymbol{C = (2.22; 2.22)}$

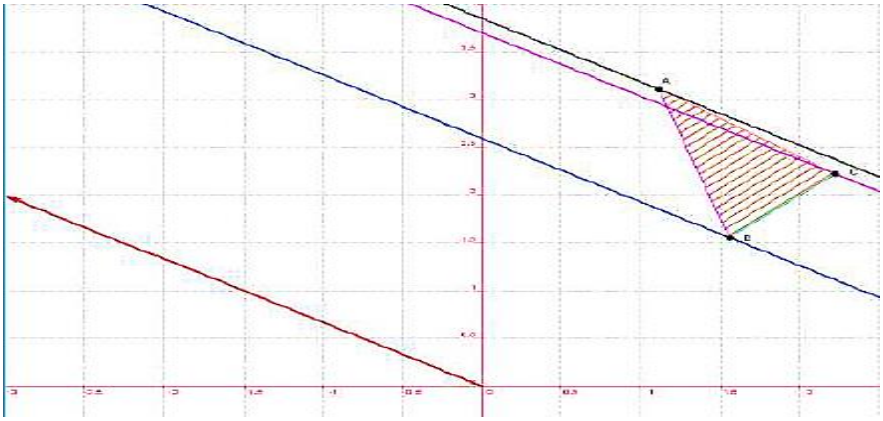
Determinación gráfica del punto óptimo:

Se grafica el vector: $\boldsymbol{v}$ $(\boldsymbol{-B}, \boldsymbol{A})$, con los coeficientes de la función objetivo

$\boldsymbol{Z(min) = 12x_1 + 8x_2}$

$\boldsymbol{v}$ $(\mathbf{-12}, \mathbf{8})$, por motivos de la escala dividimos al vector para cuatro (4) entonces tenemos:

$\boldsymbol{v}$ $(\mathbf{-3}; \mathbf{2})$



La solución gráfica del punto óptimo es: $\boldsymbol{B}$ = $(\mathbf{1.56}; \mathbf{1.56})$.

Determinación algebraica del punto óptimo:

$P(x_1, x_2)$	$12x_1$	$8x_2$	Z	
$A(1.1; 3.1)$	12(1.1)	8(3.1)	38	
$B(1.56; 1.56)$	12(1.56)	8(1.56)	31,20	← PUNTO MÍNIMO
$C(2.22; 2.22)$	12(2.22)	8(2.22)	44,40	

Interpretación:

La sucursal uno debe funcionar 1,56 días, y la sucursal dos también 1,56 días para obtener un costo mínimo de $31,2.

Comprobación:

Inecuación # 1	Inecuación # 2	Inecuación # 3
$4x_1 + 5x_2 \leq 20$ $4(1) + 5(1) \leq 20$ $4 + 5) \leq 20$ $9 \leq 20$	$7x_1 + 2x_2 \geq 14$ $7(2) + 2(2) \geq 14$ $14 + 4 \geq 14$ $18 \geq 14$	$x_1 \leq x_2$ $(1) \leq (1)$ $1 \leq 1$
Verdadero	Verdadero	Verdadero

3. Una persona quiere invertir $100000 en dos tipos de acciones, A y B. Las de tipo A tienen más riesgo, pero producen un beneficio del 10%. Las de tipo B son más seguras, pero producen solo el 7% nominal. Él decide invertir como máximo $60000 en la compra de acciones A, y por lo menos, $20000 en la compra de acciones B. Además, quiere que lo invertido en A sea, por lo menos, igual a lo invertido en B. ¿Cómo debe invertir los $100000 para que el beneficio anual sea máximo?

Datos del problema:

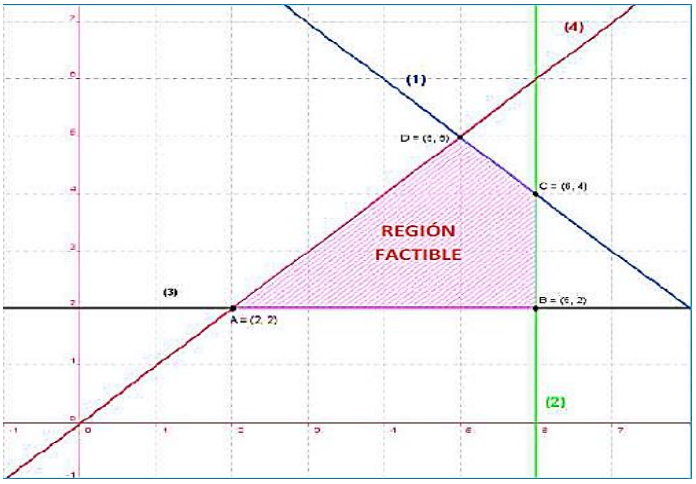
Para mayor facilidad en el momento de graficar, a las disponibilidades de las restricciones quitamos cuatro ceros, y al final para la respuesta aumentamos los cuatro ceros.

VARIABLES:
x_1 = Dinero invertido en acciones de tipo A. x_2 = Dinero invertido en acciones de tipo B.
FUNCIÓN OBJETIVO:
Maximizar: $\boldsymbol{Z(max) = 0,1X_1 + 0,07X_2}$
RESTRICCIONES:
$\begin{cases} x_1 + x_2 \leq 10 & (1) \\ x_1 \leq 6 & (2) \\ x_2 \geq 2 & (3) \\ x_1 \geq x_2 & (4) \end{cases}$
No negación: $x_1, x_2 \geq 0$

Cálculo de los puntos para graficar cada inecuación:

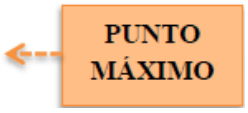
Inecuación # 1	Inecuación # 2	Inecuación # 3	Inecuación # 4
$x_1 + x_2 \leq 10$ $x_2 \leq 10 - x_1$	$x_1 \leq 6$	$x_2 \geq 2$	$x_1 \geq x_2$ *Recta que pasa por el origen.* $x_2 \leq x_1$
Tabla de valores x_1 | x_2 0 | 10 10 | 0	Interpretación de la recta La recta es paralela al eje x_2 $x_1 = 6$ Solución: $[0; 6]$	Interpretación de la recta La recta es paralela al eje x_1 $x_2 = 2$ Solución: $[2; +\infty)$	Tabla de valores x_1 | x_2 0 | 0 2 | 2

Gráfica de la región factible:



Determinación algebraica del punto óptimo:

$P(x_1, x_2)$	$0.1x_1$	$0.07x_2$	Z
$A(2,2)$	0.1(2)	0.07(2)	0,14
$B(6;2)$	0.1(6)	0.07(2)	0,74
$C(6;4)$	0.1(6)	0.07(4)	0.88
$D(5,5)$	0.1(5)	0.07(5)	0,85



Interpretación:

Una persona deberá invertir$ 60000 del producto A y 40000 del producto B para obtener un máximo beneficio de $8800.

Solución óptima múltiple acotada

Si al mover el vector de la función objetivo (F.O), su último contacto con la región de factibilidad no es un punto, si no toda una línea correspondiente a uno de los lados del polígono; entonces todos los puntos que están sobre la recta son soluciones óptimas del problema.

Una recta tiene un número infinito de puntos, entonces se tiene un número infinito de soluciones óptimas equivalentes.

La solución óptima múltiple no es frecuente en la práctica, si encontramos este tipo de solución, se tendría una gran flexibilidad para tomar la decisión; con diferentes valores de las variables, podemos obtener el mismo valor de la función objetivo, pudiendo de esta manera escoger la solución más conveniente.

Ejemplo (Valencia, 2018, p. 63):

Se quiere promocionar una marca desconocida, D, de aceites, utilizando una marca conocida, C. Para ello, se hace la siguiente oferta: “Pague a solo $ 2,5 el litro de aceite C y a $1,25 el litro de aceite D, siempre y cuando compre en total 6 litros o más y la cantidad de aceite C esté comprendida entre la mitad y el doble de la cantidad comprada de aceite D”. Disponemos de un máximo de $21,25. ¿Cuál es el costo mínimo si se proyecta gastar 6 dólares de C y D durante un día?

Datos del problema:

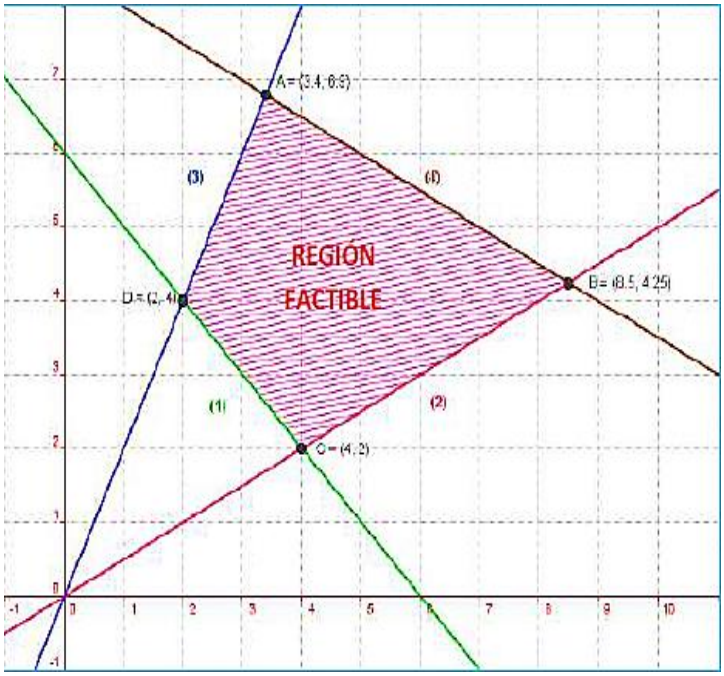
VARIABLES:
x_1 = Número de litros de aceite D. x_2 = Número de litros de aceite C.
FUNCIÓN OBJETIVO:
Minimizar: $Z(min) = 6x_1 + 6x_2$
RESTRICCIONES:
$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6 \\ \frac{x_1}{2} \leq x_2 \leq 2x_1 \\ 1.25x_1 + 2.5x_2 \leq 21.25 \end{cases}$ $\quad \begin{cases} x_1 + x_2 \geq 6 & (1) \\ x_2 \geq \frac{x_1}{2} & (2) \\ x_2 \leq 2x_1 & (3) \\ x_1 + 2x_2 \leq 17 & (4) \end{cases}$ No negación: $x_1, x_2 \geq 0$

Cálculo de los puntos para graficar cada inecuación:

Inecuación # 1	Inecuación # 2	Inecuación # 3	Inecuación # 4
$x_1 + x_2 \geq 6$ $x_2 \geq 6 - x_1$	$x_2 \geq \frac{x_1}{2}$	$x_2 \leq 2x_1$	$x_1 + 2x_2 \leq 17$ $x_2 \leq \frac{17 - x_1}{2}$

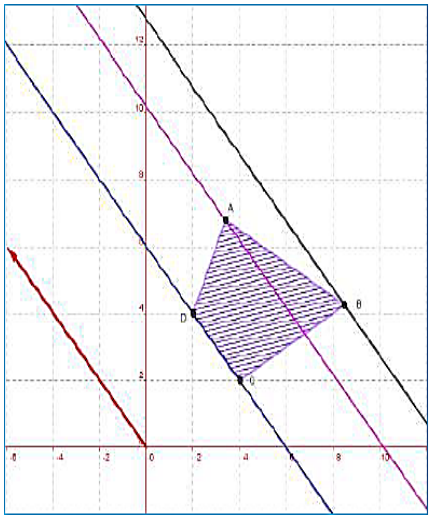
Tabla de valores		Tabla de valores		Tabla de valores		Tabla de valores	
x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
0	6	0	0	0	0	0	8,5
6	0	6	3	2	4	17	0

Gráfica de la región factible:



Determinación gráfica del punto óptimo:

Grafica el vector: $\boldsymbol{v}$ $(-\boldsymbol{B}, \boldsymbol{A})$, con los coeficientes de la función objetivo $(\boldsymbol{min}) = \boldsymbol{6x1} + \boldsymbol{6x2}$. Entonces: $\boldsymbol{v}$ $(-\boldsymbol{6}, \boldsymbol{6})$. Luego, se traza rectas paralelas al vector escogiendo el punto de menor valor que corte en el eje de coordenadas (y).



Nota:

Para encontrar el *punto mínimo* trazamos las rectas paralelas al vector con respecto a cada vértice, observamos que el menor valor en el *eje y*, es el segmento CD, eso implica que hay múltiples soluciones.

Determinación algebraica del punto óptimo:

$P(x_1, x_2)$	$6x_1$	$6x_2$	Z
$A(3,4; 6,8)$	6(3.4)	6(6.8)	61,2
$B(8,5; 4,25)$	6(8.5)	6(4.25)	76,5
$C(4; 2)$	6(4)	6(2)	36
$D(2,4)$	6(2)	6(4)	36

Recuerda:
Cuando hay al menos dos puntos con el mismo valor de Z, entonces existen soluciones óptimas múltiples

Interpretación:

Cuando tenemos soluciones óptimas múltiples podemos escoger según más nos convenga, cualquier punto que esté en el segmento de la recta. Para nuestro caso, preferimos producir 4 litros de aceite D y 2 litros de aceite C, para que el producto nuevo D salga a promocionarse en el mercado, de esta manera obtenemos un costo mínimo de $32.

Solución óptima única no acotada

Hay solución no acotada generalmente en los problemas de minimización, porque las inecuaciones son de sentido ≥, y la región factible se va al infinito positivo, como la solución óptima consiste en escoger el punto mínimo, la solución está al lado opuesto de la región factible no acotada.

En cambio, para la maximización, las soluciones factibles no acotadas estarían yendo hacia el infinito negativo, como la solución óptima consiste en escoger el punto máximo, la solución está al lado opuesto de la región factible no acotada.

Ejemplo 1, (Valencia, 2018, p. 65): Un ganadero debe suministrar un mínimo diario de 4 mg de vitamina A y 6 mg de vitamina B en el pienso que da a sus reses. Dispone para ello de dos tipos de pienso P1 y P2, cuyos contenidos vitamínicos por kg son los que aparecen en la tabla:

	A	B
P1	2	6
P2	4	3

Si el kilogramo de pienso (alimento seco que se da al ganado) P1 vale \$0,4 y el del P2 \$0,6. ¿Cómo deben mezclarse los piensos para suministrar las vitaminas requeridas con un coste mínimo?

Datos del problema:

VARIABLES:

x_1 = kg de pienso P1.
x_2 = kg de pienso P2.

FUNCIÓN OBJETIVO:

Minimizar: $Z(min) = 0,4x_1 + 0,6x_2$

RESTRICCIONES:

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \geq 4 \\ 6x_1 + 3x_2 \geq 6 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ 2x_1 + x_2 \geq 2 \end{cases} \qquad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

No negación: $x_1, x_2 \geq 0$

Cálculo de los puntos para graficar cada inecuación:

Inecuación # 1	Inecuación # 2
$x_1 + 2x_2 \geq 2$ $x_2 \geq \frac{2 - x_1}{2}$	$2x_1 + x_2 \geq 2$ $x_2 \geq 2 - 2x_1$

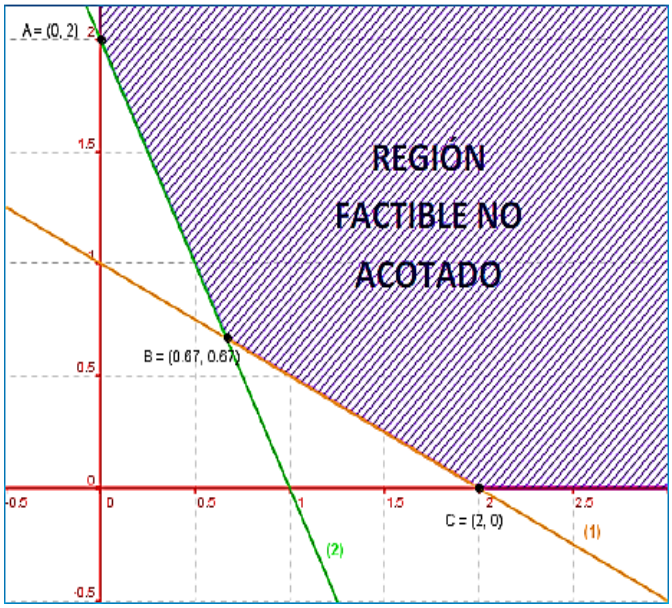
Tabla de valores

x_1	x_2
0	1
2	0

Tabla de valores

x_1	x_2
0	2
1	0

Gráfica de la región factible:



Determinación algebraica del punto óptimo:

$P(x_1, x_2)$	$0,4x_1$	$0,6x_2$	Z
$A(0,2)$	0,4(0)	0,6(2)	1,2
$B(0,67;0,67)$	0,4(0,67)	0,6(0,67)	0,67
$C(2;0)$	0,4(2)	0,6(0)	0,8

PUNTO MÍNIMO

Interpretación:

Por lo tanto, se debe mezclar 0,67 kg de pienso P1 con 0,67 kg de pienso P2 para suministrar las vitaminas requeridas y tener un coste mínimo de $0,67.

Ejemplo 2, (Valencia, 2018, p. 65): Ejercicio didáctico cuando la gráfica es no acotada y crece al infinito negativo.

Datos del problema:

VARIABLES:
x_1 = Producto A. x_2 = Producto B.
FUNCIÓN OBJETIVO:
Maximizar: $Z(max) = 5x_1 + 10x_2$
RESTRICCIONES:
$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leq 12 & (1) \\ 2 \leq x_1 \leq 4 & (2) \end{cases}$ No negación: $x_1, x_2 \geq 0$

Cálculo de los puntos para graficar cada inecuación:

Inecuación # 1	Inecuación # 2
$3x_1 + 2x_2 \leq 12$ $x_2 \leq \frac{12 - 3x_1}{2}$	$2 \leq x_1 \leq 4$
Tabla de valores x_1 | x_2 0 | 6 4 | 0	**Interpretación de la recta** La recta es paralela al eje x_2 $x_1 = 2$ $x_1 = 4$ Solución: $[2; 4]$

Gráfica de la región factible:



Determinación algebraica del punto óptimo:

$P(x_1, x_2)$	$5x_1$	$10x_2$	Z
$A(4, 0)$	5(4)	10(0)	20
$B(2, 3)$	5(2)	10(3)	40
$C(2; 0)$	5(2)	10(0)	10

PUNTO MÁXIMO

Interpretación:

Se debe fabricar 2 unidades del producto A y 3 del producto B, para tener una utilidad máxima de $40.

Solución óptima múltiple no acotada

La solución es toda una línea, correspondiente a uno de los lados del polígono; todos los puntos que están sobre la recta son soluciones óptimas del problema. Pero como la gráfica no es acotada, ocurre esto en problemas razonados por fallas en la formulación del problema u omisión de una o más restricciones.

Ejemplo, (Valencia, 2018, p. 68):

Datos del problema:

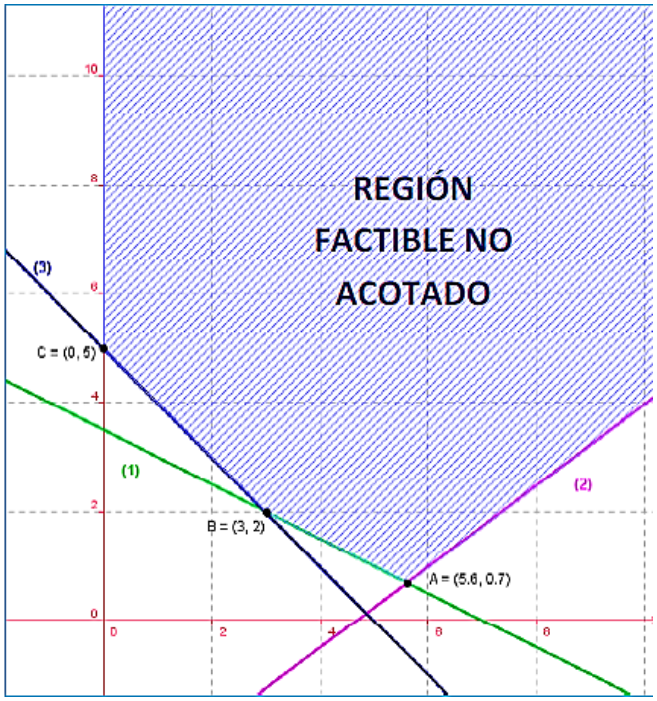
VARIABLES:
x_1 = Producto A. x_2 = Producto B.
FUNCIÓN OBJETIVO:
Minimizar: $Z(min) = 1,5x_1 + 3x_2$
RESTRICCIONES:
$\begin{cases} x_1 + 2x_2 \geq 7 & (1) \\ 3x_1 - 4x_2 \leq 14 & (2) \\ x_1 + x_2 \geq 5 & (3) \end{cases}$ No negación: $x_1, x_2 \geq 0$

Cálculo de los puntos para graficar cada inecuación:

Inecuación # 1	Inecuación # 2	Inecuación # 3
$x_1 + 2x_2 \geq 7$ $2x_2 \geq -x_1 + 7$ $x_2 \geq \frac{-x_1 + 7}{2}$	$3x_1 - 4x_2 \leq 14$ $-4x_2 \leq -3x_1 + 14(-1)$ $4x_2 \geq 3x_1 - 14$ $x_2 \geq \frac{3x_1 - 14}{4}$	$x_1 + x_2 \geq 5$ $x_2 \geq -x + 5$

Tabla de valores		Tabla de valores		Tabla de valores	
x_1	x_2	x_1	x_2	x_1	x_2
0	3,5	0	-3,5	0	5
7	0	14/3	0	5	0

Gráfica de la región factible:



Determinación algebraica del punto óptimo:

$P(x_1, x_2)$	$1,5x_1$	$3x_2$	Z
$A(5.6; 0.7)$	1,5(5,6)	3(0,7)	10,5
$B(3; 2)$	1,5(3)	3(2)	10,5
$C(0; 5)$	1,5(0)	3(5)	15

PUNTOS MÍNIMOS

Interpretación:

Cuando tenemos soluciones óptimas múltiples podemos escoger según más nos convenga, cualquier punto que esté en el segmento de la recta.

Ninguna solución

Este tipo de problemas, se presentan:

- ✓ Cuando una o más de las restricciones no se pueden encontrar en la región factible, es decir no se intersecan entre sí.
- ✓ Cuando la gráfica crece indefinidamente al infinito positivo y se pide maximizar.
- ✓ Cuando la región factible decrece indefinidamente hacia el infinito negativo y se pide minimizar.

En problemas razonados de aplicación, puede ser que se dé por mala formulación del problema o restricciones mal planteadas.

Ejemplo (Valencia, 2018, p. 70)**:**

Datos del problema:

VARIABLES:

x_1 = Producto A.
x_2 = Producto B.

FUNCIÓN OBJETIVO:

Maximizar: $Z(max) = 3x_1 + 4x_2$

RESTRICCIONES:

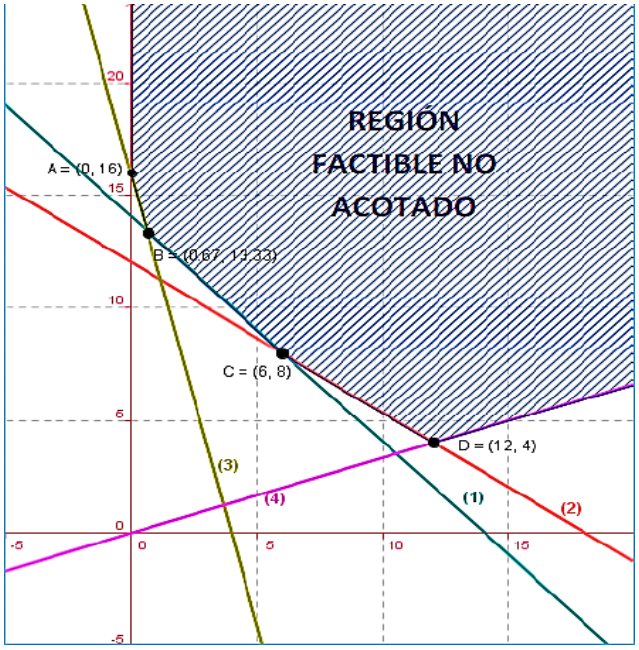
$$\begin{cases} x_1 + x_2 \geq 14 & (1) \\ 2x_1 + 3x_2 \geq 36 & (2) \\ 4x_1 + x_2 \geq 16 & (3) \\ x_1 - 3x_2 \leq 0 & (4) \end{cases}$$

No negación: $x_1, x_2 \geq 0$

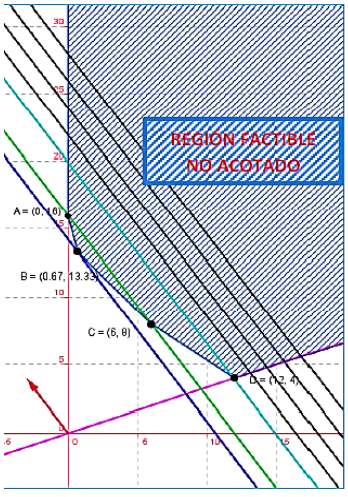
Cálculo de los puntos para graficar cada inecuación:

Inecuación # 1	Inecuación # 2	Inecuación # 3	Inecuación # 4
$x_1 + x_2 \geq 14$ $x_2 \geq -x_1 + 14$	$2x_1 + 3x_2 \geq 36$ $3x_2 \geq -2x_1 + 36$ $x_2 \geq \frac{-2x_1 + 36}{3}$	$4x_1 + x_2 \geq 16$ $x_2 \geq -4x_1 + 16$	$x_1 - 3x_2 \leq 0$ $-3x_2 \leq -x_1(-1)$ $3x_2 \geq x_1$ $x_2 \geq \frac{x_1}{3}$
Tabla de valores	Tabla de valores	Tabla de valores	Tabla de valores
x_1 | x_2 0 | 14 14 | 0	x_1 | x_2 0 | 12 18 | 0	x_1 | x_2 0 | 16 4 | 0	x_1 | x_2 0 | 0 3 | 1

Gráfica de la región factible:



Determinación gráfica del punto óptimo:





Nota:

Al trazar las rectas paralelas al vector la región factible no está acotada superiormente, por lo que podemos seguir trazando rectas paralelas indefinidamente; en consecuencia decimos que *no existe solución para maximización.*

Ejemplo (Valencia, 2018, p. 72)

Datos del problema:

VARIABLES:
x_1 = Producto A. x_2 = Producto B.
FUNCIÓN OBJETIVO:
Maximizar: $Z(max) = 4x_1 + 4x_2$
RESTRICCIONES:
$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \geq 4 & (1) \\ 2x_1 - x_2 \leq 2 & (2) \end{cases}$ No negación: $x_1, x_2 \geq 0$

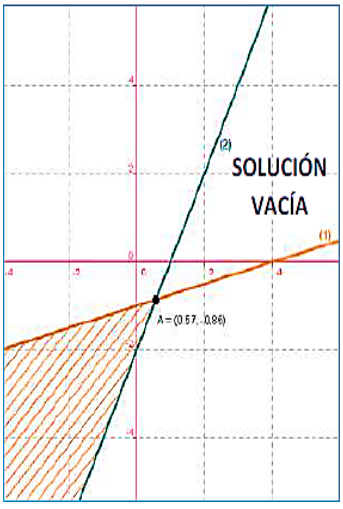
Cálculo de los puntos para graficar cada inecuación:

Inecuación # 1	Inecuación # 2
$x_1 - 4x_2 \geq 4$ $-4x_2 \geq 4 - x_1 \ (-1)$ $4x_2 \geq -4 + x_1$ $x_2 \leq \frac{x_1 - 4}{4}$	$2x_1 - x_2 \leq 2$ $-x_2 \leq 2 - 2x_1 \ (-1)$ $x_2 \geq 2x_1 - 2$
Tabla de valores	Tabla de valores

x_1	x_2
0	-1
4	0

x_1	x_2
0	-2
1	0

Gráfica de la región factible:



La inecuación uno y dos se intersecan ***pero no con el primer cuadrante.*** Entonces se tiene una solución vacía ya que no hay la intersección de todo el sistema de inecuaciones.

Ejemplo (Valencia, 2018, p. 73)

Datos del problema:

VARIABLES:
x_1 = Producto A. x_2 = Producto B.
FUNCIÓN OBJETIVO:
Minimizar: $Z(min) = 10x_1 + 5x_2$
RESTRICCIONES:
$\begin{cases} -x_1 + 3x_2 = 21 & (1) \\ x_1 + x_2 \leq 5 & (2) \end{cases}$ No negación: $x_1, x_2 \geq 0$

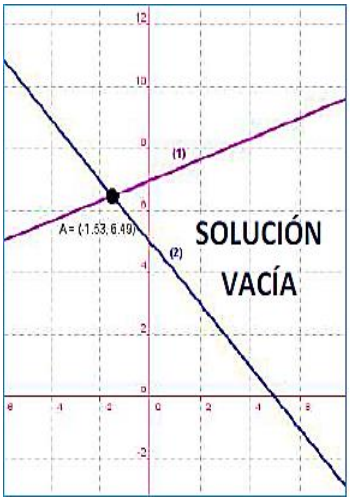
Cálculo de los puntos para graficar cada inecuación:

Inecuación # 1	Inecuación # 2
$-x_1 + 3x_2 = 21$ $3x_2 = 21 + x_1$ $x_2 = \frac{21 + x_1}{3}$	$x_1 + x_2 \leq 5$ $x_2 \leq 5 - x_1$
Tabla de valores	Tabla de valores

x_1	x_2
0	7
-21	0

x_1	x_2
0	5
5	0

Gráfica de la región factible:



La solución de la ecuación uno es solo la recta. La intersección con la inecuación dos es desde el punto A hacia el infinito negativo, seguido la recta uno. *Pero no se interseca con el primer cuadrante*. Entonces se tiene una solución vacía.

Análisis de sensibilidad

En esencia, el análisis de sensibilidad estudia cómo afecta a la solución óptima y a la función objetivo, por el cambio de algunas de sus variables y la dependencia entre ellas.

Se utiliza el análisis de sensibilidad para examinar los efectos de cambios en tres áreas diferenciadas del problema:

1.- Los cambios en los coeficientes de la función objetivo (coeficiente objetivo), NO afectan a la forma de la región factible, consecuentemente no afectarán a la solución óptima, aunque sí al valor de la función objetivo.

2.- Los cambios en los coeficientes tecnológicos (son aquellos coeficientes que afectan a las variables de las restricciones, situados a la izquierda de la desigualdad), provocarán cambios sustanciales en la forma de la región factible.

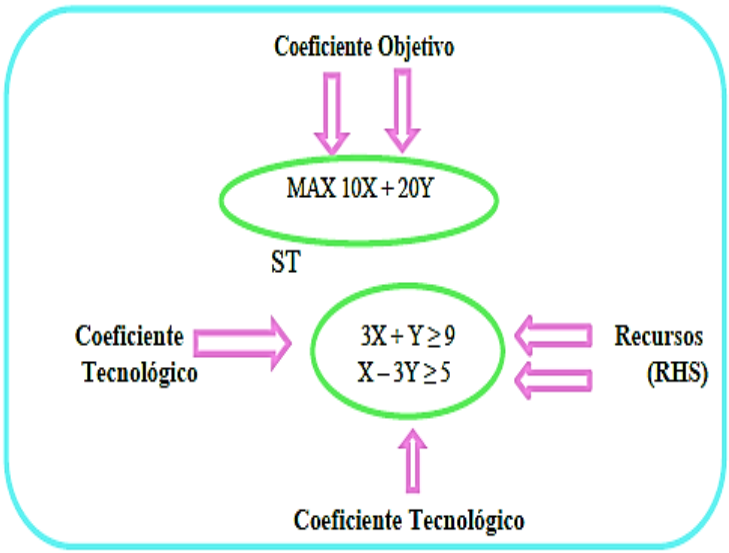
En el caso de 2 variables, gráficamente varían en la pendiente de las rectas que representan las restricciones.

3.- Los cambios en el los recursos disponibles (RHS), corresponden a los términos independientes de cada restricción, situados a la derecha de la desigualdad, para dos variables; suponen desplazamientos paralelos de las rectas asociadas a las restricciones, lo cual hará variar la forma de la región factible y, con ello, a la solución óptima.

Veamos la función objetivo, los coeficientes y sus recursos ***Figura 22***:

Figura 22.

Coeficientes objetivos, tecnológicos, recursos de la F.O. de un ejemplo.



Fuente: (Valencia, 2018)

Realicemos el análisis de sensibilidad de la función objetivo: $\boldsymbol{Z0} = 40X_1 + 50X_2$, cambiando el parámetro o el multiplicador de la primera variable X_1 de 40 a 60 y el multiplicador de la segunda variable X_2 de 50 a 35; para ver cuál será el cambio que se tendrá dentro de la solución óptima y de la función objetivo:

$$\boldsymbol{Z_0} = 40X_1 + 50X_2$$

$$60X_1 + 35X_1$$

Dichos cambios deberán regirse por la regla del 100%:

Regla del 100%

$$\frac{\textit{VALOR NUEVO} - \textit{VALOR ACTUAL}}{\textit{VALOR ACTUAL}}$$

$$\frac{60-40}{40} = 0.5$$

$$0.50 + 0.30 = 0.80$$

$$\frac{35-50}{50} = -0.30 = |-0.30| = 0.30$$

Nota:
Cuando se obtienen términos negativos se deberá aplicar valor absoluto para obtener el valor positivo.

Si el resultado es menor que el 100%, el cambio de los dos coeficientes simultáneos no afectará a la solución óptima y dentro de la gráfica o zona óptima de este ejemplo, no habrá problema al realizar dichos cambios.

Restricciones

Hay tres diferentes tipos de restricciones:

- ✓ Restricción de oro
- ✓ Restricción de plata
- ✓ Restricción de no negatividad

Observaciones:

La restricción de la No negatividad nos indica que la respuesta tiene que ser positiva, ubicada en el primer cuadrante del plano cartesiano.

Cada restricción al igual que la función objetivo, deberá cambiar los valores de sus coeficientes ***Tabla 9***:

Tabla 9.

Ejemplo de las restricciones de oro y plata.

Restricción de Oro	Restricción de Plata
$X_1 + \frac{3}{2}X_2 = 750$	$X_1 + \frac{3}{2}X_2 = 750$
↓	↓
$X_1 + \frac{3}{2}X_2 = 950$	$\frac{3}{2}X_1 + X_2 = 1000$

Fuente: (Valencia, 2018)

De acuerdo a la ***Tabla 9***, se dice:

1.- Restricción de oro cuando, en la ecuación se cambia, el término independiente de un valor por otro.

2.- Restricción de plata, cuando en la ecuación se cambia, los coeficientes de la primera variable por los de la segunda variable y viceversa, también el término independiente se lo cambia por otro valor.

Y aplicamos la regla del 100%:

$$\frac{950 - 750}{750} = 0.26 \qquad \frac{1000 - 750}{750} = 0.33$$

Y finalmente sumamos:

$0.26 + 0.33 = 0.59$

Recuerda:
Un coeficiente puede variar, sin alterar el punto óptimo hasta que la pendiente sea igual a la de la recta que une los puntos.

La respuesta 0.59 o 59%, es menor que cien, quiere decir que el cambio en el lado derecho de las ecuaciones no alterará la región factible.

CAPÍTULO TRES
PROGRAMACIÓN LINEAL: INFORME DE SENSIBILIDAD DE SOLVER

Introducción

El análisis de sensibilidad es una técnica muy empleada en la práctica. Aunque, vale la pena indicar que además de esta técnica existen muchas otras como los árboles de decisión, el análisis del riesgo y la simulación, las cuales pueden ser empleadas para evaluar la incertidumbre de una alternativa de inversión.

Principales ventajas que proporciona el uso del análisis de sensibilidad:

a) Su fácil entendimiento, ya que no se requiere tener conocimientos sobre la teoría de probabilidades, y por ende es una técnica de aplicación sencilla y económica.
b) Cuantifica el efecto que puede tener sobre la rentabilidad de un proyecto la incertidumbre en el comportamiento de las variables que condicionan la rentabilidad.
c) Pone de relieve las desviaciones y errores de estimación que pueden perjudicar seriamente la rentabilidad de un proyecto.
d) Separa las áreas que deben ser objeto de particular esfuerzo de recopilación de información, análisis y control.
e) Permite fijar los valores límite que han de tener las variables determinantes de la rentabilidad para que el proyecto sea rentable.
f) Exige una mayor precisión en la formulación de hipótesis y en la estimación de parámetros.

¿Qué es un análisis de sensibilidad?

El análisis de sensibilidad según (Corvo, 2021), es un procedimiento que determina cómo valores diferentes de una variable independiente impactan en una variable dependiente bajo un conjunto de restricciones.

Estudia cómo la incertidumbre, en el resultado de un modelo o sistema matemático puede asignarse a las variables de entrada, de sus diferentes fuentes o menciones.

Esta técnica se utiliza dentro de límites específicos, que dependen de una o más variables de entrada.

El análisis de sensibilidad, también conocido como análisis de simulación o qué pasa si; con un cierto rango de variables, es una forma de predecir o pronosticar el resultado de una decisión; es decir, un analista puede determinar, cómo los cambios en una variable afectan el resultado.

¿Para qué sirve un análisis de sensibilidad?

El análisis de sensibilidad es utilizado en modelos, por los gerentes y responsables en la toma de decisiones, para comprender las incertidumbres (falta de seguridad, de confianza o de certeza sobre algo), de pros y contras, con las limitaciones y el alcance de un modelo de decisión.

La mayoría de las decisiones se toman bajo incertidumbre y que, con la aplicación de esta técnica, llega a una conclusión, reemplazando todos los parámetros inciertos con los valores esperados; se obtiene el análisis de sensibilidad.

Evaluación de la confianza en el modelo

Sería de mucha ayuda para la toma de decisiones, tener alguna indicación sobre la sensibilidad al cambiar una o más variables de entrada.

Para esto requiere:

1.- Cuantificar la incertidumbre en los resultados del modelo (análisis de incertidumbre)
2.- Evaluar la contribución de cada entrada en la incertidumbre del resultado.

El análisis de sensibilidad aborda el segundo de estos puntos, ordenando por importancia la fuerza y relevancia las variables de entrada para determinar la variación en el resultado.

En modelos que tienen muchas variables de entrada, el análisis de sensibilidad es fundamental para la construcción del modelo y poder garantizar la calidad.

Usos

Como consecuencia de la aplicación del análisis de sensibilidad, es clave indicar la sensibilidad de una simulación, por las incertidumbres de los valores de entrada del modelo.

Por su uso o aplicación, el análisis de sensibilidad:

- ✓ Ayuda a evaluar el riesgo de una estrategia.
- ✓ Sirve para identificar qué tan dependiente es el resultado con respecto a una variable particular de entrada.
- ✓ Analiza si la dependencia ayuda a evaluar el riesgo asociado.
- ✓ Ayuda a tomar decisiones informadas y apropiadas.

- ✓ Sirve para buscar errores en el modelo, al encontrar relaciones inesperadas entre las entradas y los resultados.

¿Cómo hacer un análisis de sensibilidad?

Un análisis de sensibilidad, también conocido como análisis **qué pasa si**, siendo el más utilizado por analistas financieros para predecir el resultado de una acción específica, cuando se realiza bajo ciertas condiciones.

El análisis de sensibilidad se realiza dentro de límites definidos o restringidos; determinados por el conjunto de variables de entrada independientes.

Por ejemplo, el análisis de sensibilidad se puede utilizar para estudiar el efecto de un cambio en las tasas de interés sobre los precios de los bonos, si las tasas de interés aumentan un 1 %.

La pregunta ¿Qué pasa si…? Para el ejemplo indicado, sería: ¿Qué pasa con el precio de un bono, si las tasas de interés subieran un 1 %? Esta pregunta se responde con el análisis de sensibilidad.

Existen diferentes métodos para llevar a cabo el análisis de sensibilidad:

- ✓ Técnicas de modelado y simulación.
- ✓ Herramientas de gestión de escenarios a través de Microsoft Excel.

Técnicas

Existen principalmente dos técnicas para analizar la sensibilidad:

Análisis de sensibilidad local

Está basado en derivadas (numéricas o analíticas). El término local indica que las derivadas se toman en un solo punto. Este método es apto para funciones de costos simples. Sin embargo, no es factible para modelos complejos, como modelos con discontinuidades, ya que no siempre tienen derivadas.

Matemáticamente, la sensibilidad de la función de costo con respecto a ciertos parámetros es igual a la derivada parcial de la función de costo con respecto a esos parámetros.

El análisis de sensibilidad local es una técnica “uno a la vez”. Analiza el impacto de un solo parámetro a la vez en la función de costo, manteniendo fijos los otros parámetros.

Análisis de sensibilidad global

El análisis de sensibilidad global es el segundo enfoque para el análisis de sensibilidad, el cual se implementa frecuentemente usando las técnicas de Monte Carlo. Este enfoque utiliza un conjunto global de muestras que sirven para explorar el espacio de diseño.

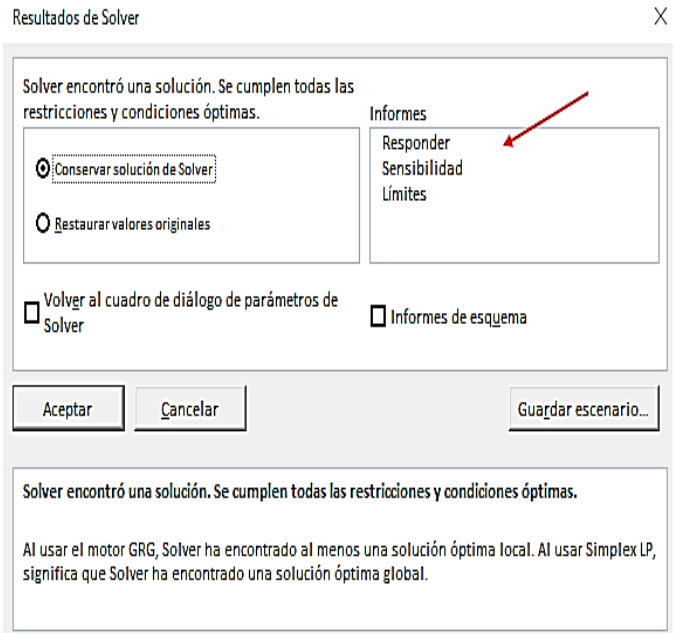
Informes de Solver

Solver produce tres tipos de informes (***Figura 23***) según el tipo de restricción que se le aplique:

- ✓ El **informe Responder,** muestra la celda objetivo, las celdas cambiantes, las restricciones, y ofrece información del estado de las restricciones.
- ✓ El **informe Confidencialidad,** indica el grado de confidencialidad que tiene la celda objetivo con respecto a los cambios de restricciones.
- ✓ El **informe Límites,** indica hasta cuánto se pueden cambiar o variar los valores de las celdas cambiantes dentro de los límites de las restricciones.

Figura 23.

Tipos de Informes de Solver



Fuente: Solver de Excel

Solver ofrece tres opciones (***Figura 24***) en la lista Método de resolución del cuadro de diálogo Parámetros de Solver:

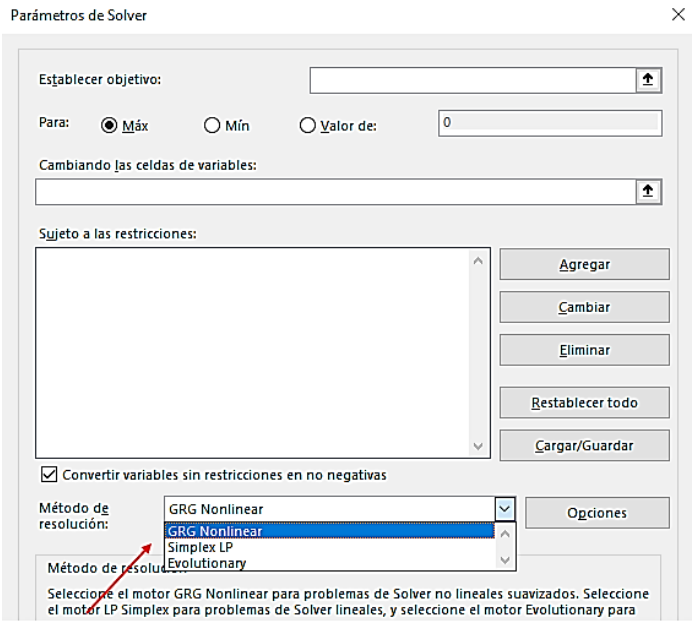
- ✓ CRG Nonlinear: Es la opción predeterminada, que se aplica a problemas no lineales, cuyos puntos se extienden por una línea curva.

✓ Simplex LP: Se utiliza este método para problemas de líneas rectas.

✓ Evolutionary: Este método se aplica a problemas cuyos elementos no encajan ni en una línea curva ni en una recta; es decir, los elementos son más aleatorios o discontinuos.

Figura 24.

Métodos de resolución de Solver.

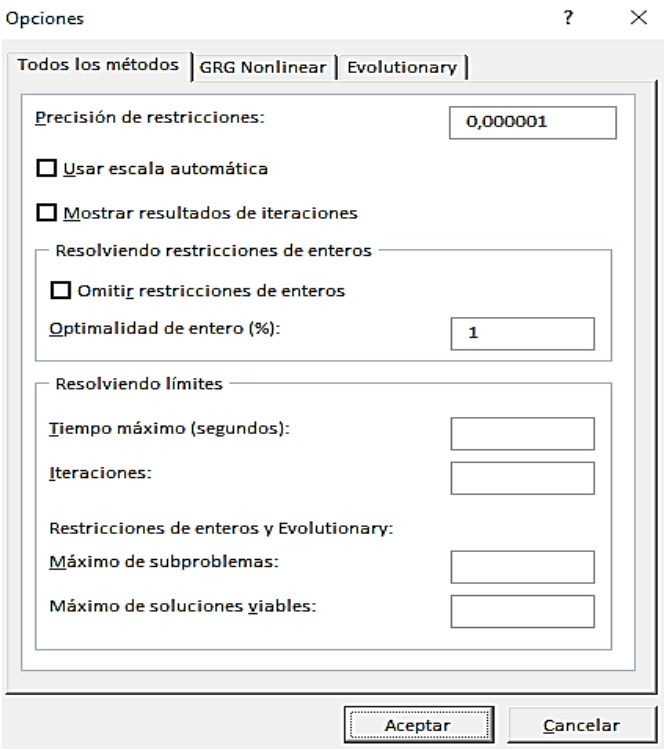


Fuente: Solver de Excel

El cuadro de diálogo Opciones de Solver (***Figura 25***) permite ajustar valores para resolver límites (tiempo máximo y número de iteraciones), incluye una opción (Mostrar resultados de iteraciones) para analizar paso a paso cada cálculo de Solver y otra para controlar la precisión de los valores sujetos a restricciones. El valor predeterminado es 0,000001.

Figura 25.

Opciones de Solver



Fuente: Solver de Excel

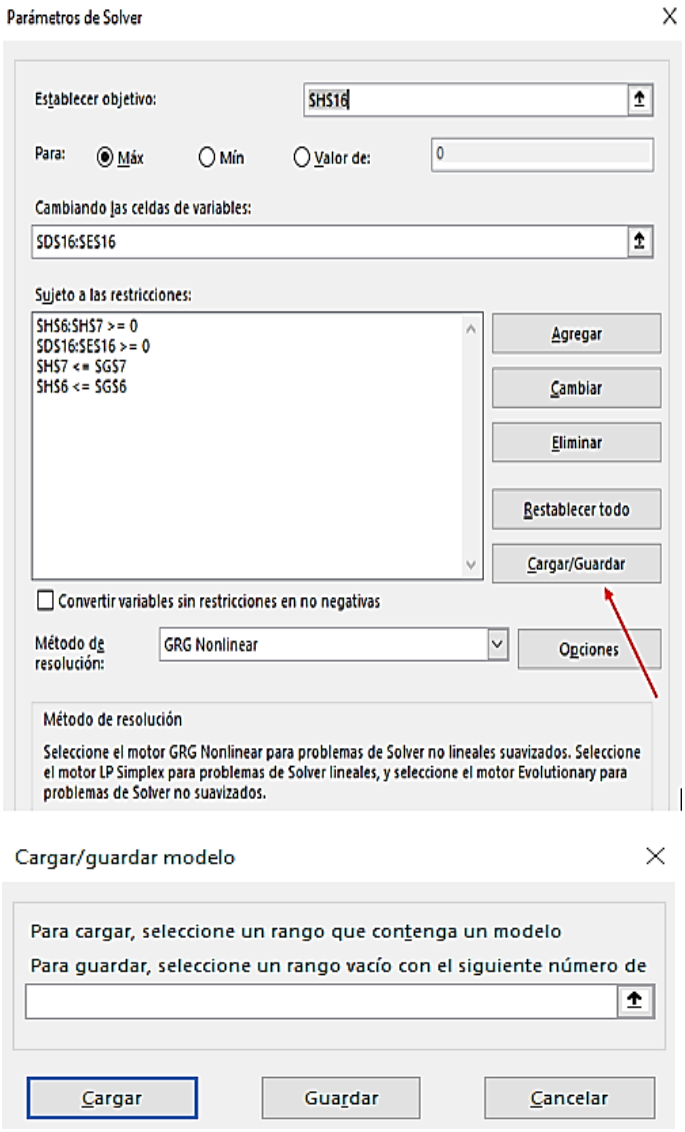
Si reduce el valor (más próximo a 1), puede ser que al final necesite más tiempo para resolver el problema.

Cuando se guarda un libro en el que se ha definido un problema para que Solver lo resuelva, Excel guarda la información de Solver en cada hoja de un libro.

No obstante, también es posible guardar más (modelos) haciendo clic en el botón Cargar/Guardar del cuadro de diálogo Parámetros de Solver. Utilice el cuadro de diálogo Cargar/Guardar modelo para especificar un rango de celdas que incluya un modelo previamente guardado y pulse Cargar. Para guardar un modelo, seleccione el número de celdas indicadas y pulse Guardar (***Figura 26***).

Figura 26.

Cargar/Guardar del cuadro Parámetros de Solver



Fuente: Solver de Excel

Para cargar el complemento Solver:

1. Haga clic en Archivo y pulse Opciones.
2. En el cuadro de diálogo Opciones de Excel, haga clic en Complementos.
3. En la lista Administrar, elija Complementos de Excel y pulse el botón Ir.
4. En el cuadro de diálogo Complementos, marque la casilla Solver después pulse Aceptar.

Para configurar los parámetros de Solver:

1. En la ficha Datos, grupo Análisis, pulsa el botón Solver.
2. En el cuadro de diálogo Parámetros de Solver, especifique obra la celda objetivo en el campo Establecer objetivo.

3. En la sección Para, marque Máx, Mín o Valor de. Si marca Valor de, escriba un valor.
4. En el campo Cambiando las celdas de variables, especifique las celdas o rangos de celdas que Solver puede cambiar cuando analice los datos.
5. Para la sección Sujeto a las restricciones, pulse Agregar y rellene el cuadro de diálogo Agregar restricción.
Se necesita más restricciones, pulse Agregar en el cuadro Agregar restricción cuantas veces sea necesario. Al final, pulse Aceptar.
6. Pulse Resolver.

Ejercicios de aplicación del Análisis de sensibilidad utilizando Solver de Excel:

Ejercicio 1: Considere el siguiente problema. (Nuñez, y otros, s.f.):

Maximizar Z = 2x1 + 4x2 + 3x3,

sujeta a:

1) x1+ 3x2 + 2x3 <= 30

2) x1 + x2 + x3 <= 24

3) 3x1 + 5x2 + 3x3 <= 60 y

4) x1>= 0, x2 >= 0, x3 >= 0.

Usted obtiene la información de que x1 > 0, x2 =0 y x3 >0 en la solución óptima.

a) Describa cómo puede usar la información para resolver este problema en el número mínimo posible de iteraciones (si comienza con la solución BF inicial de costumbre). No realice iteraciones. *

Solución:

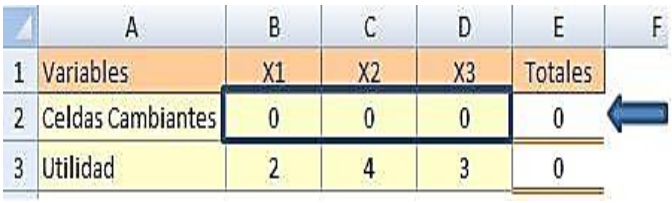
Planteamiento del Problema en Excel

Problema 4.3-7, Maximización.

Variables	X1	X2	X3	Totales
Celdas Cambiantes	0	0	0	0
Utilidad	2	4	3	0

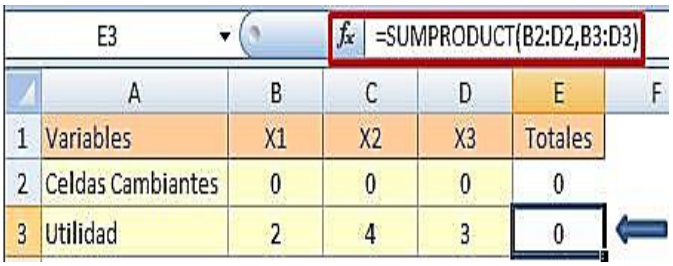
Sujeta a:	X1	X2	X3	Utilizado		Capacidad
Restricción 1	1	3	2	0	<=	30
Restricción 2	1	1	1	0	<=	24
Restricción 3	3	5	3	0	<=	60

Paso 1: Planteamiento del modelo en la hoja de cálculo. Esto incluye la definición de los recuadros "celdas cambiantes", que se refieren a las celdas de las variables que Se quieren determinar.



	A	B	C	D	E	F
1	Variables	X1	X2	X3	Totales	
2	Celdas Cambiantes	0	0	0	0	
3	Utilidad	2	4	3	0	

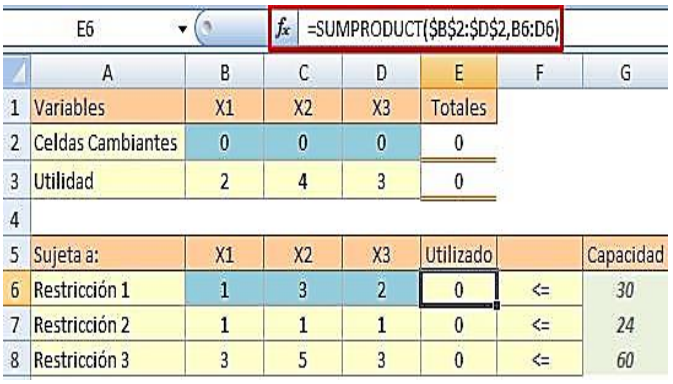
Paso 2: Se plantea la fórmula que permite obtener la utilidad (costo) del problema como función objetivo. En este caso se define en E3, la suma producto de las celdas cambiantes (B2:D2) por la utilidad de cada variable (B3:D3).



E3 | =SUMPRODUCT(B2:D2,B3:D3)

	A	B	C	D	E	F
1	Variables	X1	X2	X3	Totales	
2	Celdas Cambiantes	0	0	0	0	
3	Utilidad	2	4	3	0	

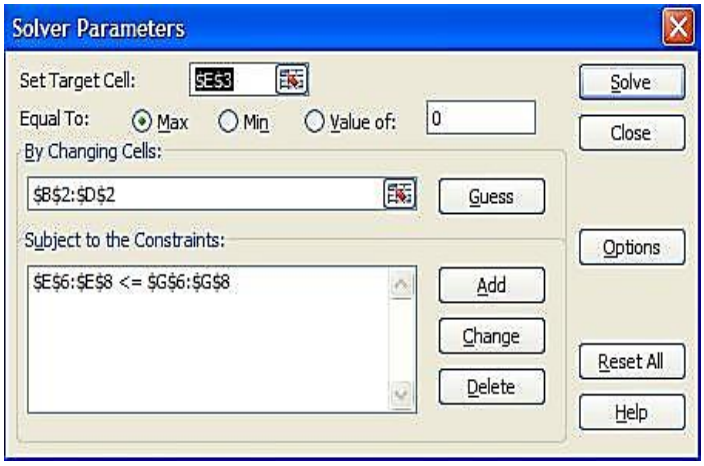
Paso 3: Se plantean las restricciones del modelo y la utilización de los recursos de acuerdo a las celdas cambiantes. Por ejemplo, la utilización de los recursos para la restricción 1, se visualiza en la celda E6 con la suma producto de los coeficientes de los recursos de esta restricción (B6:D6) por las celdas cambiantes (B2:D2).



E6 | =SUMPRODUCT($B$2:$D$2,B6:D6)

	A	B	C	D	E	F	G
1	Variables	X1	X2	X3	Totales		
2	Celdas Cambiantes	0	0	0	0		
3	Utilidad	2	4	3	0		
4							
5	Sujeta a:	X1	X2	X3	Utilizado		Capacidad
6	Restricción 1	1	3	2	0	<=	30
7	Restricción 2	1	1	1	0	<=	24
8	Restricción 3	3	5	3	0	<=	60

Paso 4: Se activa la función de Solver, ir a la sección de Datos y seleccione la opción de Solver.

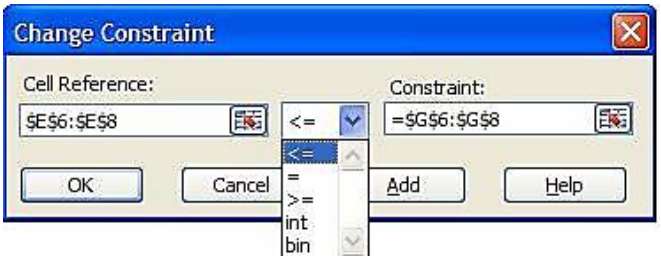


Celda objetivo (Set Target Cell): se selecciona la ubicación donde se calcula el valor que se desea optimizar. En este caso la celda E5 calcula la utilidad del problema.

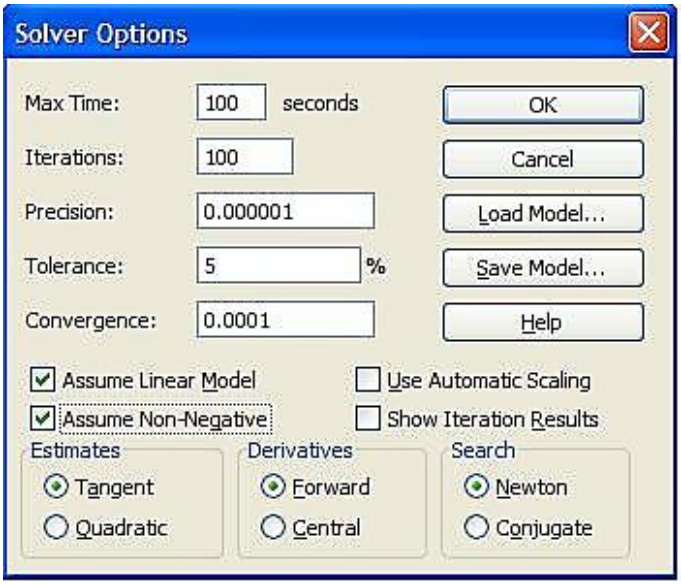
Valor de la celda objetivo (Equalto): Como el problema es de maximización se selecciona Max.

Celdas cambiantes (ByChangingCells): se les denomina así ya que Solver asignará valores a estas celdas en orden de conseguir la solución óptima del problema. En este caso las celdas cambiantes van de B2 a D2.

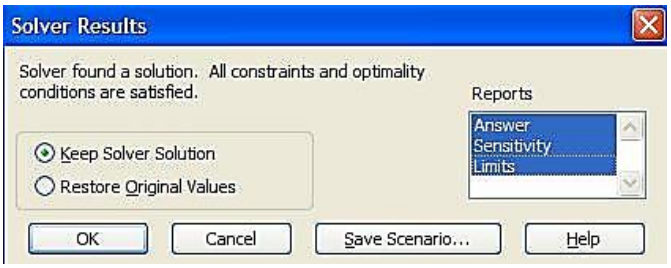
Sujetas a las siguientes restricciones (SubjecttotheConstraints): se agregan las restricciones presionando Agregar (Add) y definiendo la utilización de los recursos de acuerdo al nivel de actividad (E6:E8) versus los límites del problema planteado (G6:G8).



Luego se selecciona Opciones (Options) para definir el tipo de problema y preferencias para la solución del mismo. En ese sentido, se define asumir modelo lineal y asumir no negativos, y entre las preferencias estimaciones lineal (Tangent), derivaciones progresivas (Forward) y hallar por metodología Newton, entre otras opciones. (En la mayoría de casos no es necesario modificar datos en esta ventana, ya que pueden usarse los valores por defecto).



Paso 5: Resolver el problema haciendo click en Resolver (Solver). Inmediatamente aparece un recuadro notificando que Solver ha encontrado una solución que parece óptima. En lado de derecho de este cuadro permite seleccionar la generación de 3 informes: Respuestas (Answer), Sensibilidad (Sensivity) y Limites Limits).



	A	B	C	D	E	F	G
1	Variables	X1	X2	X3	Totales		
2	Celdas Cambiantes	10	0	10	20		
3	Utilidad	2	4	3	50		
4							
5	Sujeta a:	X1	X2	X3	Utilizado		Capacidad
6	Restricción 1	1	3	2	30	<=	30
7	Restricción 2	1	1	1	20	<=	24
8	Restricción 3	3	5	3	60	<=	60

La solución óptima encontrada tiene un valor de 50 en la función objetivo maximizada con la entrada de las variables X1 y X3 en la solución óptima ambas con 10 unidades y cero para X2. También se visualiza una holgura de 4 en la restricción 2 que pasa a formar parte integral de la solución final.

Ejercicio 2: Maximizar (Mendez, 2021):

El chef principal (encargado de la parrilla) de *"Tacoste"*, está tratando de decidir cuál es la **mejor manera de asignar las materias primas** disponibles a los cuatro platillos especiales del viernes por la noche. La decisión se debe tomar temprano por la tarde porque tres de los platillos se deben empezar a preparar ya (albóndigas, tacos y picadillo).

La tabla que está en seguida contiene la información sobre los alimentos en inventario y las cantidades requeridas por cada platillo.

Alimento	Hamburguesa con Queso	Albóndigas	Tacos	Picadillo	Disponible
Carne molida (lbs.)	0.3	0.25	0.25	0.4	100 lbs.
Queso (lbs.)	0.1	0	0.3	0.2	50 lbs.
Frijoles (lbs.)	0	0	0.2	0.3	50 lbs.
Lechuga (lbs.)	0.1	0	0.2	0	15 lbs.
Tomate (lbs.)	0.1	0.3	0.2	0.2	50 lbs.
Panes	1	1	0	0	80 panes
Tortillas	0	0	1	0	80 tortillas

No hay otros hechos importantes para la decisión del chef. A continuación, se presenta la demanda de mercado estimada y el precio de venta.

	Hamburguesa con Queso	Albóndigas	Tacos	Picadillo
Demanda	75	60	100	55
Precio de Venta	$2.25	$2.00	$1.75	$2.50

El chef quiere **maximizar el ingreso** porque ya ha comprado todos los materiales, los cuales están en el congelador.

1. ¿Cuál es la mejor mezcla de los especiales del viernes por la noche para maximizar el ingreso de Tacoste?

2. Si un proveedor ofreciera surtir un pedido extra de panes a $1.00 la pieza, ¿vale la pena invertir ese dinero?

Solución

Planteamiento matemático:

Definimos las variables de decisión:

H = Número de Hamburguesas con queso a preparar el viernes
A = Número de Albóndigas a preparar el viernes
T = Número de Tacos a preparar el viernes
P = Número de porciones de picadillo a preparar el viernes

Función Objetivo

$$Max\ (Ingresos) = 2.25H + 2A + 1.75T + 2.5P$$

Restricciones: **respecto a los insumos*:***

- **Carne Molida:** $0.3H + 0.25A + 0.25T + 0.4P \leq 100$
- **Queso:** $0.1H + 0.3T + 0.2P \leq 50$
- **Frijoles:** $0.2T + 0.3P \leq 50$
- **Lechuga:** $0.1H + 0.2T \leq 15$
- **Tomate:** $0.1H + 0.3A + 0.2T + 0.2P \leq 50$
- **Panes:** $H + A \leq 80$
- **Tortillas:** $T \leq 80$

Respecto a la demanda:

- **Hamburguesa con queso:** $H \leq 75$
- **Albóndigas:** $A \leq 60$
- **Tacos:** $T \leq 100$
- **Picadillo:** $P \leq 55$

- ***No negatividad:***

$$H, A, T, P \geq 0$$

Solución en Excel:

Representaremos el problema en Excel empezando con los datos que componen la función objetivo

	A	B	C	D	E	F
1	Función Objetivo		Hamburguesa con Queso	Albóndigas	Tacos	Picadillo
2		Variables				
3		Precio de Venta	$ 2.25	$ 2.00	$ 1.75	$ 2.50
4		Ingreso Total	$ -			

=SUMAPRODUCTO(C2:F2;C3:F3)

Las celdas referidas a las variables quedarán **en blanco** ya que ahí se generará la solución.

En la celda de ingreso total hemos colocado la siguiente fórmula para representar la función objetivo: **=SUMAPRODUCTO (C2:F2; C3:F3)**.

A continuación, realizaremos otra tabla (dentro de la misma hoja de cálculo) con los datos de las restricciones:

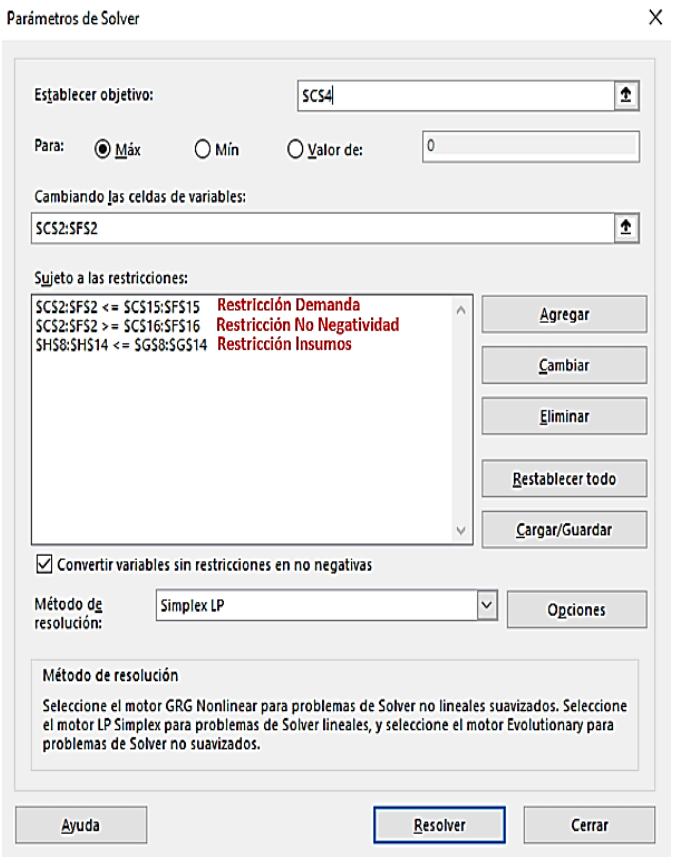
	A	B	C	D	E	F	G	H
7	Restricciones	Alimento	Hamburguesa con Queso	Albóndigas	Tacos	Picadillo	Disponible	Total
8		Carne molida (lbs.)	0.3	0.25	0.25	0.4	100	0
9		Queso (lbs.)	0.1	0	0.3	0.2	50	0
10		Frijoles (lbs.)	0	0	0.2	0.3	50	0
11		Lechuga (lbs.)	0.1	0	0.2	0	15	0
12		Tomate (lbs.)	0.1	0.3	0.2	0.2	50	0
13		Panes	1	1	0	0	80	0
14		Tortillas	0	0	1	0	80	0
15		Demanda	75	60	100	55		
16		No negatividad	0	0	0	0		

Para la columna “Total” se utilizó nuevamente la formula “SUMAPRODUCTO” de la siguiente forma:

Alimento	Total
Carne molida (lbs.)	=SUMAPRODUCTO($C$2:$F$2;C8:F8)
Queso (lbs.)	=SUMAPRODUCTO($C$2:$F$2;C9:F9)
Frijoles (lbs.)	=SUMAPRODUCTO($C$2:$F$2;C10:F10)
Lechuga (lbs.)	=SUMAPRODUCTO($C$2:$F$2;C11:F11)
Tomate (lbs.)	=SUMAPRODUCTO($C$2:$F$2;C12:F12)
Panes	=SUMAPRODUCTO($C$2:$F$2;C13:F13)
Tortillas	=SUMAPRODUCTO($C$2:$F$2;C14:F14)

Esta columna realiza el cálculo del **consumo real** de cada insumo, de acuerdo a los valores que se obtengan de las variables decisión.

Como ya tenemos representado nuestro problema en Excel; ahora daremos click en la Pestaña Datos y luego en el botón **Solver**, donde obtendremos la siguiente ventana:



- En la opción ***"Establecer objetivo"*** seleccionaremos la celda correspondiente al cálculo de los ingresos: $C$4.
- Seleccionamos la opción ***"Máx"***, **"Mín"** o un valor específico, dependiendo del problema que resolveremos. Para nuestro ejemplo seleccionaremos "Máx".

- Para la opción ***"Cambiando las celdas de variables"*** colocaremos las celdas correspondientes a las variables de decisión: $C$2: $F$2.
- En la parte de restricciones daremos click en agregar y colocaremos cada una de las restricciones de la siguiente forma:

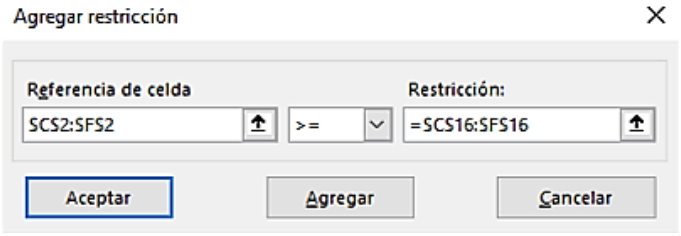
  - **Insumos:**



  - **Demanda:**

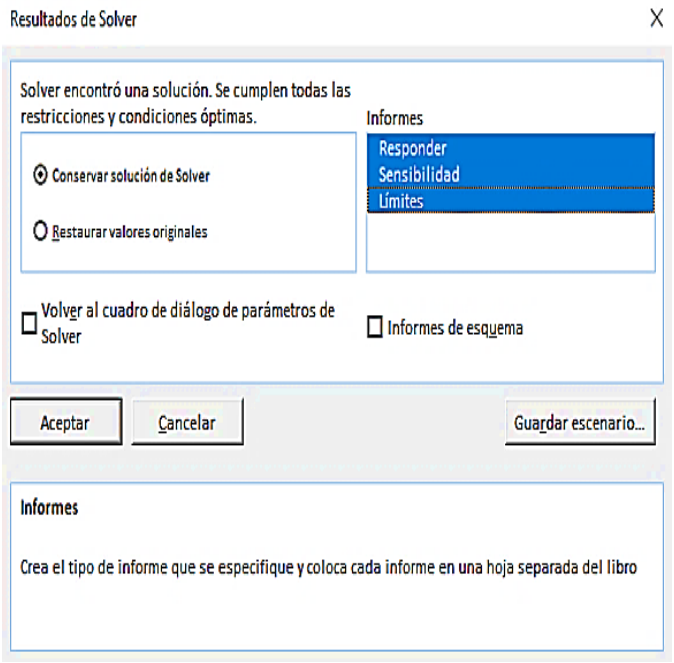


  - **No Negatividad:**



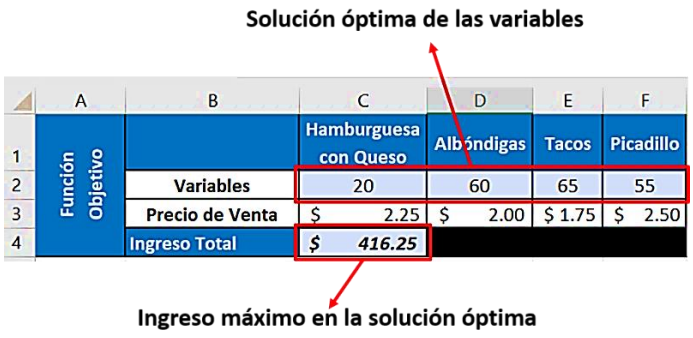
- La restricción de No negatividad puede obviarse haciendo click en el check de ***"Convertir variables sin restricciones en no negativas"***.
- Seleccionamos como método de resolución ***"Simplex LP"***.
- Finalmente damos click en ***"Resolver"***.

Al dar click en resolver obtendremos la siguiente ventana:



Selecciones los 3 informes disponibles: Responder, Sensibilidad y Límites y damos click en aceptar.

En las celdas que habíamos dejado vacías para nuestras variables de decisión, aparecerán los valores óptimos que maximizan los ingresos del problema:



H = 20

A = 60

T = 65

P = 55

El ingreso máximo aparece en la celda correspondiente por un valor de 416.25 dólares.

Informes de Solver:

Para resolver la pregunta referente a si vale la pena invertir en comprar pan adicional a $1 la unidad, analizaremos los reportes que nos brinda Solver:

Informe de respuestas

Celda objetivo (Máx)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$C$4	Ingreso Total Hamburguesa con Queso	$ -	$ 416.25

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$C$2	Variables Hamburguesa con Queso	0	20	Continuar
$D$2	Variables Albóndigas	0	60	Continuar
$E$2	Variables Tacos	0	65	Continuar
$F$2	Variables Picadillo	0	55	Continuar

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$H$8	Carne molida (lbs.) Total	59.25	$H$8<=$G$8	No vinculante	40.75
$H$9	Queso (lbs.) Total	32.5	$H$9<=$G$9	No vinculante	17.5
$H$10	Frijoles (lbs.) Total	29.5	$H$10<=$G$10	No vinculante	20.5
$H$11	Lechuga (lbs.) Total	15	$H$11<=$G$11	Vinculante	0
$H$12	Tomate (lbs.) Total	44	$H$12<=$G$12	No vinculante	6
$H$13	Panes Total	80	$H$13<=$G$13	Vinculante	0
$H$14	Tortillas Total	65	$H$14<=$G$14	No vinculante	15
$C$2	Variables Hamburguesa con Queso	20	$C$2<=$C$15	No vinculante	55
$D$2	Variables Albóndigas	60	$D$2<=$D$15	Vinculante	0
$E$2	Variables Tacos	65	$E$2<=$E$15	No vinculante	35
$F$2	Variables Picadillo	55	$F$2<=$F$15	Vinculante	0
$C$2	Variables Hamburguesa con Queso	20	$C$2>=$C$16	No vinculante	20
$D$2	Variables Albóndigas	60	$D$2>=$D$16	No vinculante	60
$E$2	Variables Tacos	65	$E$2>=$E$16	No vinculante	65
$F$2	Variables Picadillo	55	$F$2>=$F$16	No vinculante	55

En este informe visualizamos nuevamente la solución óptima y datos adicionales sobre las restricciones; los más importantes son:

- **Valor de la celda:** Representa el uso real de cada insumo en nuestra solución óptima. Por ejemplo: Teníamos disponible 100 libras disponibles de carne molida, sin embargo, en nuestra solución solamente utilizamos 59,25 libras.
- **Demora:** Representa la cantidad de insumo que dejamos de utilizar. En nuestro ejemplo de la carne molida se obtiene restando los 100 disponibles menos las 59,25 libras que se utilizan; en total 40,75 libras.
- **Estado:** Informa sobre si el recurso se usó completamente (vinculante) o si tiene un valor sobrante (no vinculante). Los valores vinculantes limitan el resultado final de la función objetivo.

Respecto al pan, el informe indica que éste es un recurso **vinculante**, lo que representa que limita el resultado final de los ingresos; por lo tanto, el conseguir más pan permitirá poder aumentar el nivel de ingresos.

¿A qué precio debería conseguir el pan adicional?

Para responder esta pregunta revisaremos nuestro informe de sensibilidad.

Informe de sensibilidad:

Microsoft Excel 16.0 Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: [Libro2]Hoja1
Informe creado: 7/04/2018 12:32:38

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$C$2	Variables Hamburguesa con Queso	20	0	2.25	0.625	1.375
$D$2	Variables Albóndigas	60	0.625	2	1E+30	0.625
$E$2	Variables Tacos	65	0	1.75	2.75	1.25
$F$2	Variables Picadillo	55	2.5	2.5	1E+30	2.5

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$H$8	Carne molida (lbs.) Total	59.25	0	100	1E+30	40.75
$H$9	Queso (lbs.) Total	32.5	0	50	1E+30	17.5
$H$10	Frijoles (lbs.) Total	29.5	0	50	1E+30	20.5
$H$11	Lechuga (lbs.) Total	15	8.75	15	3	13
$H$12	Tomate (lbs.) Total	44	0	50	1E+30	6
$H$13	Panes Total	80	1.375	80	55	20
$H$14	Tortillas Total	65	0	80	1E+30	15

Este análisis de sensibilidad nos brinda la siguiente información:

Celdas Variables:

Final Valor: indica los valores de la solución óptima para cada variable.

Reducido Coste: En este ejemplo, se interpreta como la variación que tendrá el valor final de la función objetivo por cada unidad que variamos en una determinada variable. Por ejemplo: Si aumentamos /reducimos en una unidad la variable picadillo; entonces el resultado final de la función objetivo aumentará/reducirá en $2.5.

Objetivo Coeficiente: Representan los coeficientes que tiene la función objetivo.

Permisible Aumentar: Evalúa el nivel de incremento permitido en los coeficientes de la función objetivo; sin cambiar la solución óptima. Por ejemplo: El coeficiente correspondiente a la variable H de 2.25, puede aumentar hasta en 0.625 adicional, manteniéndose la misma solución.

Permisible Reducir: Evalúa el nivel de reducción permitido en los coeficientes de la función objetivo; sin cambiar la solución óptima. Por ejemplo: El coeficiente correspondiente a la variable H de 2.25, puede reducirse en 1.375, manteniéndose la misma solución.

Restricciones:

- ***Final Valor:*** Representa el valor que toma la restricción en la solución óptima. En nuestro caso, por ejemplo, de la cantidad de libras de tomate disponible, el valor final de uso es 44 libras.
- ***Precio Sombra:*** También conocido como precio dual; indican en cuanto mejora o disminuye la función objetivo, si se aumenta/disminuye el límite que la restringe. Por ejemplo, por cada libra de lechuga que podamos conseguir, nuestros ingresos aumentaran en $8.75.
- ***Restricción Lado Derecho:*** Indica el valor que tiene el lado derecho de las desigualdades. En nuestro caso son los mismos valores que se indican en la columna “Disponible”.
- ***Permisible Aumentar:*** Hacen referencia hasta qué punto puede incrementarse la desigualdad de la restricción sin que varíe el precio sombra. Por ejemplo, habíamos mencionado que por cada libra de lechuga que se aumente, nuestros ingresos crecerán a una tasa de $8.75; sin embargo, esta tasa de crecimiento sólo será válido hasta 3 libras adicionales. Si agregamos más unidades, el precio sombra cambiará.
- ***Permisible Reducir:*** Representa hasta qué punto puede disminuirse la desigualdad de la restricción sin afectar el precio sombra.

Finalmente, para responder a la pregunta, si me conviene conseguir pan adicional por $1, evaluamos el incremento en los ingresos para el pan en la columna del precio sombra. Este valor nos indica que los ingresos aumentarán en 1.375 por cada unidad de pan adicional; por lo tanto, el obtener el pan a $1, significará una **ganancia de 0.375 dólares** para el restaurant por cada pan adicional.

No debemos olvidar que este precio sombra se mantiene igual hasta **un máximo de 55 panes adicionales**; por lo que la empresa sólo podrá aceptar a ese precio la venta de 55 panes. Para comprar una mayor cantidad se debe realizar un nuevo análisis.

Informe de Límites:

Microsoft Excel 16.0 Informe de límites
Hoja de cálculo: [Libro2]Hoja1
Informe creado: 7/04/2018 12:32:38

		Objetivo	
Celda	Nombre		Valor
$C$4	Ingreso Total		$416.25

		Variable		Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo
Celda	Nombre		Valor	Límite	Resultado	Límite	Resultado
$C$2	Variables	Hamburguesa cor	20	0	371.25	20	416.25
$D$2	Variables	Albóndigas	60	0	296.25	60	416.25
$E$2	Variables	Tacos	65	0	302.5	65	416.25
$F$2	Variables	Picadillo	55	0	278.75	55	416.25

Este informe nos brinda la siguiente información:

- **Valor:** nos recuerda el valor óptimo de cada una de las variables.
- **Límite Inferior:** Es el menor valor que puede tomar la variable y cumplir todas las restricciones; cuando las demás variables mantienen su valor óptimo.
- **Resultado Objetivo:** Es el valor de la función objetivo si la variable toma el valor del límite inferior y las otras variables mantienen su valor óptimo.
- **Límite Superior:** Es el mayor valor que puede tomar la variable y cumplir todas las restricciones; cuando las demás variables mantienen su valor óptimo.
- **Resultado Objetivo:** Es el valor de la función objetivo si la variable toma el valor del límite superior y las otras variables mantienen su valor óptimo.

Ejemplo 2 – Minimizar (Mendez, 2021):

Nutmeg Corporation elabora cinco productos diferentes a base de nueces simples y mezcladas: el paquete de almendras, el paquete de nueces, el paquete gourmet, el paquete fantasía y el paquete económico. Cada producto (individual o en mezcla) se vende en latas de una libra. La empresa compra almendras a razón de $0.80 por libra, nueces a $0.60 por libra y cacahuates a $0.35 por libra. Los cacahuates se emplean para completar todas las

mezclas y la compañía tiene una provisión ilimitada de ellos. El suministro de almendras y nueces es limitado. La compañía puede comprar hasta 3,000 libras de almendras y 2,000 libras de nueces. A continuación, se presentan los requisitos de recursos y los pronósticos de demanda de los productos.

Producto	Requisitos Mínimos (%)			Demanda (latas)
	Almendras	Nueces	Cacahuate	
Almendras	100	-	-	1250
Nueces	-	100	-	750
Gourmet	45	45	10	1000
Fantasía	30	30	40	500
Económico	20	20	60	1500

¿Con qué mezcla se minimiza el costo que implica satisfacer la demanda de los cinco productos?

Solución

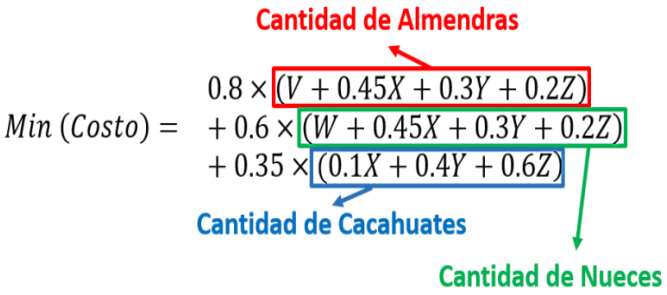
Planteamiento Matemático:

V = Número de latas del paquete de almendras a producir
W = Número de latas del paquete de nueces a producir
X = Número de latas del paquete gourmet a producir
Y = Número de latas del paquete fantasía a producir
Z = Número de latas del paquete económico a producir

La función objetivo busca minimizar los costos de compra de insumos:

$$Min\ (Costo) = \begin{array}{l} 0.8 \times (V + 0.45X + 0.3Y + 0.2Z) \\ + 0.6 \times (W + 0.45X + 0.3Y + 0.2Z) \\ + 0.35 \times (0.1X + 0.4Y + 0.6Z) \end{array}$$

A continuación, se presenta una explicación a esta función objetivo:



Simplificando tenemos:

$$Min\ (Costo) = 0.8V + 0.6W + 0.665X + 0.56Y + 0.49Z$$

Las restricciones para la compra de insumos son las siguientes:

$$\text{Almendras:} \quad V + 0.45X + 0.3Y + 0.2Z \leq 3000$$

$$\text{Nueces:} \quad W + 0.45X + 0.3Y + 0.2Z \leq 2000$$

Las restricciones para satisfacer la demanda son:

$$V \geq 1250 \quad X \geq 1000 \quad Z \geq 1500$$

$$W \geq 750 \quad Y \geq 500$$

La restricción de no negatividad se encuentra incluida en la restricción de satisfacción de demanda.

Solución en Excel:

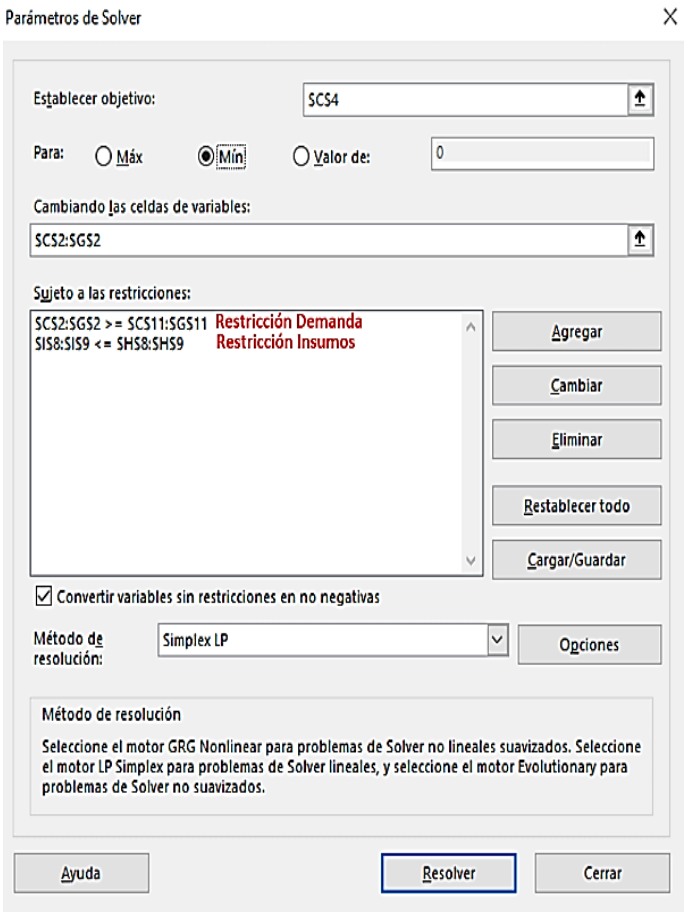
A continuación, mostramos el planteamiento en Excel:

	A	B	C	D	E	F	G
1	Función Objetivo		Paquete de Almendras	Paquete de Nueces	Paquete Gourmet	Paquete Fantasía	Paquete Económico
2		Variables					
3		Coeficientes	0.80	0.60	0.665	0.56	0.49
4		Costo	$ -				

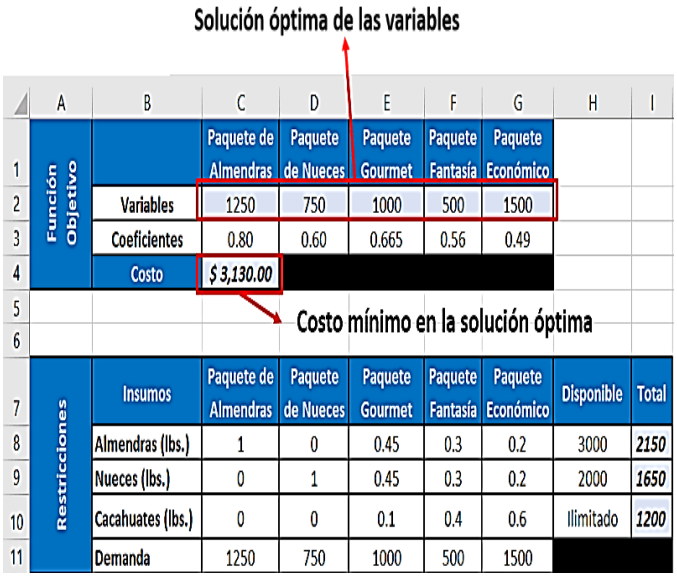
=SUMAPRODUCTO(C2:G2;C3:G3)

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
7	Restricciones	Insumos	Paquete de Almendras	Paquete de Nueces	Paquete Gourmet	Paquete Fantasía	Paquete Económico	Disponible	Total
8		Almendras (lbs.)	1	0	0.45	0.3	0.2	3000	0
9		Nueces (lbs.)	0	1	0.45	0.3	0.2	2000	0
10		Cacahuates (lbs.)	0	0	0.1	0.4	0.6	Ilimitado	0
11		Demanda	1250	750	1000	500	1500		

La configuración en Solver sería:



La solución es:



	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	Función Objetivo		Paquete de Almendras	Paquete de Nueces	Paquete Gourmet	Paquete Fantasía	Paquete Económico		
2		Variables	1250	750	1000	500	1500		
3		Coeficientes	0.80	0.60	0.665	0.56	0.49		
4		Costo	$ 3,130.00						
5									
6									
7	Restricciones	Insumos	Paquete de Almendras	Paquete de Nueces	Paquete Gourmet	Paquete Fantasía	Paquete Económico	Disponible	Total
8		Almendras (lbs.)	1	0	0.45	0.3	0.2	3000	2150
9		Nueces (lbs.)	0	1	0.45	0.3	0.2	2000	1650
10		Cacahuates (lbs.)	0	0	0.1	0.4	0.6	Ilimitado	1200
11		Demanda	1250	750	1000	500	1500		

Informes de Solver:

Respuestas

Celda objetivo (Mín)

Celda	Nombre	Valor original	Valor final
$C$4	Costo Paquete de Almendras	$ -	$ 3,130.00

Celdas de variables

Celda	Nombre	Valor original	Valor final	Entero
$C$2	Variables Paquete de Almendras	0	1250	Continuar
$D$2	Variables Paquete de Nueces	0	750	Continuar
$E$2	Variables Paquete Gourmet	0	1000	Continuar
$F$2	Variables Paquete Fantasía	0	500	Continuar
$G$2	Variables Paquete Económico	0	1500	Continuar

Restricciones

Celda	Nombre	Valor de la celda	Fórmula	Estado	Demora
$I$8	Almendras (lbs.) Total	2150	$I$8<=$H$8	No vinculante	850
$I$9	Nueces (lbs.) Total	1650	$I$9<=$H$9	No vinculante	350
$C$2	Variables Paquete de Almendras	1250	$C$2>=$C$11	Vinculante	0
$D$2	Variables Paquete de Nueces	750	$D$2>=$D$11	Vinculante	0
$E$2	Variables Paquete Gourmet	1000	$E$2>=$E$11	Vinculante	0
$F$2	Variables Paquete Fantasía	500	$F$2>=$F$11	Vinculante	0
$G$2	Variables Paquete Económico	1500	$G$2>=$G$11	Vinculante	0

Sensibilidad

Microsoft Excel 16.0 Informe de sensibilidad
Hoja de cálculo: [Ejercicio 2.xlsx]Hoja1
Informe creado:

Celdas de variables

Celda	Nombre	Final Valor	Reducido Coste	Objetivo Coeficiente	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$C$2	Variables Paquete de Almendras	1250	0.8	0.8	1E+30	0.8
$D$2	Variables Paquete de Nueces	750	0.6	0.6	1E+30	0.6
$E$2	Variables Paquete Gourmet	1000	0.665	0.665	1E+30	0.665
$F$2	Variables Paquete Fantasía	500	0.56	0.56	1E+30	0.56
$G$2	Variables Paquete Económico	1500	0.49	0.49	1E+30	0.49

Restricciones

Celda	Nombre	Final Valor	Sombra Precio	Restricción Lado derecho	Permisible Aumentar	Permisible Reducir
$I$8	Almendras (lbs.) Total	2150	0	3000	1E+30	850
$I$9	Nueces (lbs.) Total	1650	0	2000	1E+30	350

Límites

Microsoft Excel 16.0 Informe de límites
Hoja de cálculo: [Ejercicio 2.xlsx]Hoja1
Informe creado:

		Objetivo	
Celda		Nombre	Valor
$C$4	Costo		$3,130.00

		Variable		Inferior	Objetivo	Superior	Objetivo
Celda		Nombre	Valor	Límite	Resultado	Límite	Resultado
$C$2	Variables	Paquete de Almendras	1250	1250	3130	2100	3810
$D$2	Variables	Paquete de Nueces	750	750	3130	1100	3340
$E$2	Variables	Paquete Gourmet	1000	1000	3130	1777.78	3647.2222
$F$2	Variables	Paquete Fantasía	500	500	3130	1666.67	3783.3333
$G$2	Variables	Paquete Económico	1500	1500	3130	3250	3987.5

GLOSARIO DE TÉRMINOS

Optimización.Se refiere a la capacidad de hacer o resolver alguna cosa de la manera más eficiente posible y, en el mejor de los casos, utilizando la menor cantidad de recursos.

Maximizar. Hacer o intentar que algo, alcance su máximo rendimiento

Restricción. Se refiere a limitar, ajustar, estrechar o circunscribir algo.

Diseñar. Dibujar, asignar

Sensibilidad. es la magnitud de la reacción de una determinada variable a cambios de otra.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Corvo, H. S. (2021). *Análisis de sensibilidad*. Obtenido de Lifeder: https://www.lifeder.com/analisis-sensibilidad/

Ecured. (2021). *Ecured*. Obtenido de Solver: https://www.ecured.cu/Solver

Eppen, G., Gould, F., Schmidt, C., Moore, J., & Weatherford, L. (2000). *Investigación de Operaciones en la Ciencia Administrativa.* México: Prentice-Hall.

Excel Total. (2021). *Excel Total*. Obtenido de Activar Excel Solver: https://exceltotal.com/utilizando-excel-solver/

Mendez, A. (2021). *Cómo resolver un problema de programación lineal con Solver-Excel 2016*. Obtenido de Plan de Mejora: https://www.plandemejora.com/como-resolver-un-problema-de-programacion-lineal-con-solver-excel-2016/

Nuñez, M., Gonzales, T., Altamirano, J., Osorto, L., Reyes, C., & Umaña, A. (s.f.). *Investigación de operaciones: Ejemplo Análisis de sensibilidad utilizando Solver de Excel*. Obtenido de https://classroom-io.blogspot.com/2013/07/ejemplo-analisis-de-sensibilidad.html

Pintado Pérez, D. (15 de 10 de 2020). *BidDown*. Obtenido de El estudio comparativo en el proceso de compras: https://biddown.com/estudio-comparativo-proceso-compras/

Salazar_López, B. (08 de 06 de 2019). *Ingeniería Industrial*. Obtenido de Programación lineal en Solver: https://www.ingenieriaindustrialonline.com/investigacion-de-operaciones/programacion-lineal-en-solver/

Valencia, R. (2018). *Investigación operativa. Programación lineal, problemas resueltos con soluciones detalladas.* Ambato: Megagraf.





Primera Edición

ISBN: 978-9942-692-48-1

