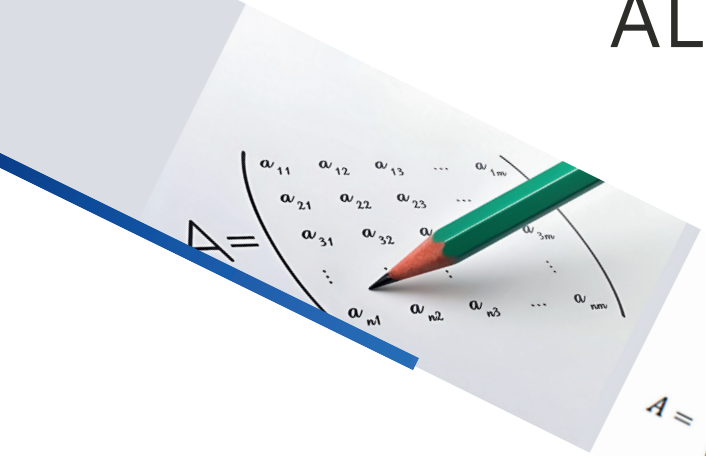
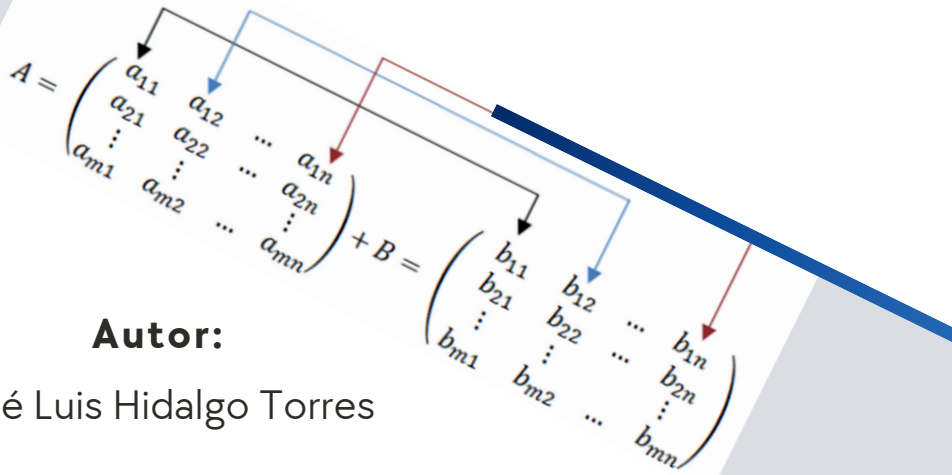
ÁLGEBRA





Autor:

José Luis Hidalgo Torres

Deming
EDITORIAL TECNOLÓGICA

AÑO 2024

José Luis Hidalgo Torres

Álgebra

Prólogo escrito por el PhD. Daniel Navarrete

Editorial Deming

Álgebra
Autor: José Luis Hidalgo Torres

Editorial Deming
Dirección: Calle Edmundo Chiriboga OE-3H y Jorge Páez, Quito, Ecuador

Primera edición – Año 2024

ISBN: 978-9942-692-06-1

Impreso por: GraficArte

Asesoría y colaboración: didáctica editorial

© Este libro es de uso científico, académico e investigativo. Prohibida su comercialización.

Para más información, escribir al correo:
editorial@deming.edu.ec

El álgebra es una parte fundamental de las matemáticas y tiene numerosas aplicaciones científicas y tecnológicas. Esta obra que usted tiene en sus manos aborda de forma completa y detallada los sistemas de ecuaciones lineales, matrices, determinantes y métodos matriciales. La inclusión de gráficos, análisis y ejemplos prácticos facilita el aprendizaje y la aplicación de los conceptos en situaciones reales. Invitamos al lector a sumergirse en esta obra, que es un recurso indispensable para el estudio y la enseñanza del álgebra en el entorno universitario.

PhD. Daniel Navarrete

ÍNDICE DE CONTENIDOS

INTRODUCCIÓN 12

CAPÍTULO UNO SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES N X N 13

Introducción 13

Ecuaciones lineales 13

Definición de ecuación lineal 13

Despeje de variables 17

Sistemas de ecuaciones lineales 20

Definición de sistemas de m ecuaciones lineales con n variables 20

Solución de un sistema de ecuaciones lineales mxn 21

Tipos de soluciones: 22

Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos 27

Sistemas equivalentes 28

Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales 28

Método de igualación 28

Método de suma y resta o de eliminación de Gauss 30

Método de sustitución 33

Método de determinantes 35

Análisis gráfico 40

Gráficas de planos en el sistema cartesiano XYZ 43

El punto en el sistema cartesiano tridimensional 44

CAPÍTULO DOS MATRICES 49

Introducción 49

Definición de matriz: 49

Tipos de matrices 50

Operaciones matriciales 59

Matrices iguales 59

Suma de matrices 59
Multiplicación por un escalar 60
Producto de matrices 61
Matriz inversa 63
Cálculo de la inversa de una matriz n× n por la adjunta 67
Rango de una matriz 68
CAPÍTULO TRES DETERMINANTES 70
Introducción 70
Definición de determinante 70
Cálculo de determinantes de segundo y tercer orden por el método de la Regla de Sarrus 71
Propiedades de los determinantes 73
Determinante Menor de un elemento 77
Cofactor de un elemento 78
CAPÍTULO CUATRO MÉTODOS MATRICIALES EN LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES 85
Introducción 85
Métodos matriciales 85
Método de eliminación de Gauss 88
Pivoteo 89
Análisis de Soluciones para un Sistema de n Ecuaciones Lineales con m Variables 94
Ejemplos de aplicación práctica: 97
Método de la Regla de Cramer 100
GLOSARIO DEL MÓDULO 103
BIBLIOGRAFÍA 104

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1 Gráfica de la ecuación de una recta 14

Figura 2 Interpretación gráfica según el tipo de pendiente 14

Figura 3 Pendiente de la recta 15

Figura 4 Soluciones de un sistema de ecuaciones lineales 2x2 25

Figura 5 Soluciones gráficas de sistemas de ecuaciones lineales 3x3 26

Figura 6 Sistema cartesiano en el espacio o XYZ 43

Figura 7 Octantes en el sistema cartesiano tridimensional. 44

Figura 8 Gráfica del punto en el espacio 44

INTRODUCCIÓN

En este material guía, lo que se pretende es dar una introducción al álgebra y sus aplicaciones. Proponiendo un plan de estudio: Capítulo I. Sistemas de ecuaciones lineales n x n, los estudiantes tengan un acercamiento al planteamiento de sistemas de ecuaciones y su solución por medio de métodos algebraicos; además de su análisis geométrico. Capítulo II. Matrices, se incluye el concepto de matriz, propiedades y operaciones, y la representación matricial de un sistema lineal de ecuaciones. Capítulo III. Determinantes, definición del concepto de determinante, procedimiento de su cálculo, propiedades y la relación con la solución de sistemas de ecuaciones lineales con métodos como Cramer y la matriz inversa. Y Capítulo IV. Métodos matriciales en la solución de sistemas de ecuaciones lineales; se aplican los métodos matriciales en la solución de sistemas de ecuaciones de diferentes tamaños y características.

CAPÍTULO UNO

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES N X N

Introducción

Actualmente, una gran cantidad de aplicaciones se resuelven mediante sistemas de ecuaciones lineales, en diversos campos tales como economía, sociología, ecología, demografía, genética, electrónica, ingeniería, física, etc.; la resolución de sistemas de ecuaciones lineales es uno de los problemas más importantes en matemáticas.

Usando métodos de matemática moderna, es posible reducir un problema de mucha complejidad, a simples sistemas de ecuaciones lineales.

Ecuaciones lineales

Según (Muñoz_Chipatecua, 2021):

Definición de ecuación lineal

Una ecuación lineal es una expresión matemática de la forma:

$$a_1x_1+a_2x_2+\ldots+a_nx_n = b$$

Se puede, también escribir esta ecuación de la siguiente manera: $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$

$\sum_{i=1}^{n} a_i x_i$: Este símbolo matemático, se lee como: Sumatoria de los $a_i x_i$, que van desde i = 1, …, n

Nota: El símbolo sumatoria: $\sum_{i}^{n}$ reemplaza o sustituye a todas las operaciones aritméticas que puede tener la estructura de ecuación lineal.

Donde: $a_i, b \in R$, x_i incógnitas o variables de la ecuación, todas de primer grado ($\in R$). Los escalares a_i son los coeficientes de los xi respectivamente, y b es el valor constante o independiente de la ecuación.

Si: b = 0, a la expresión matemática se le conoce como **ecuación lineal homogénea**.

Caso particular:

La forma común de una ecuación lineal es: $Ax + By = C$ (1)

Donde: x e y son variables reales; a, b, c ∈ R.

Si: A ≠ 0, B ≠ 0, entonces la gráfica de esta ecuación es una línea recta, siendo una de las razones por la cual recibe el nombre de ecuación lineal.

Despejando la variable y de (1), se tiene:

$$y = -\frac{A}{B}x + \frac{C}{B}$$

Haciendo: $m = -\frac{A}{B}$ $b = \frac{C}{B}$

Se tendría: $y = mx + b$

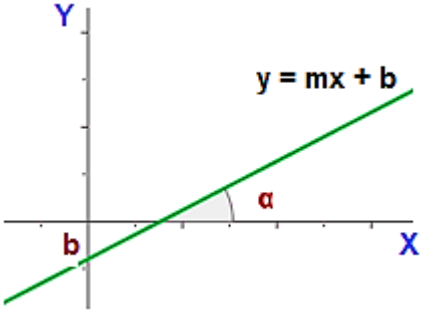
Donde:

m: es la pendiente de la ecuación

b: es el corte de la gráfica de la ecuación con el eje Y.

La pendiente m, corresponde a la tangente del ángulo de inclinación que se forma entre el eje X y la gráfica de la ecuación (Figura 1): $m = t_g\alpha$

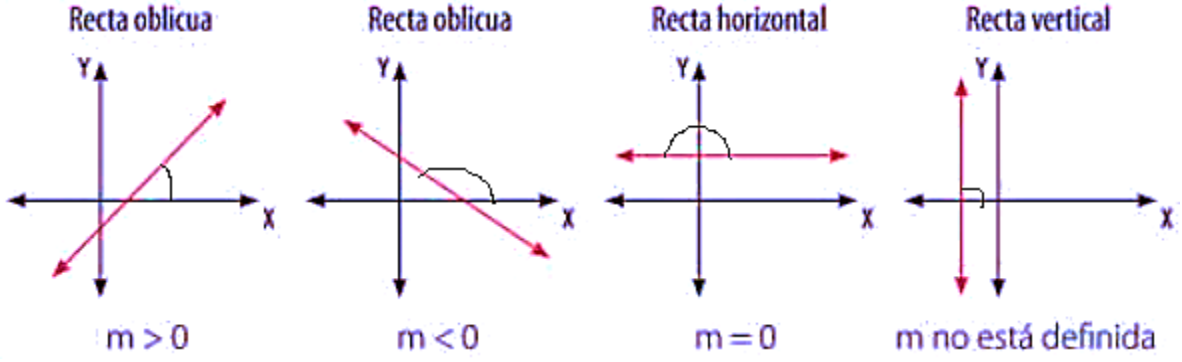
Figura 1
Gráfica de la ecuación de una recta



De acuerdo al signo de la pendiente m (Figura 2):

si $m > 0$ la recta es creciente
si $m < 0$ la recta es decreciente
si $m = 0$ la recta es constante y la gráfica es paralela al eje X

Figura 2
Interpretación gráfica según el tipo de pendiente

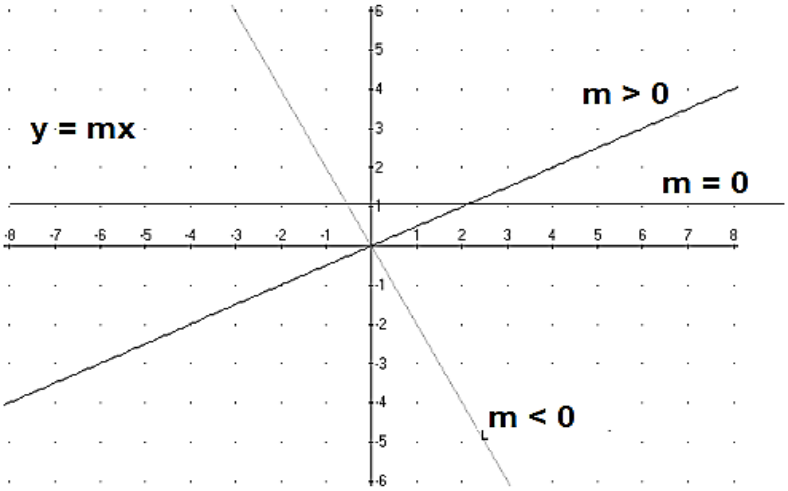


Consecuencias adicionales, de la interpretación Figura 2:

Si m > 0:	$\mathbf{0^0 < \alpha < 90^0}$	α: Ángulo agudo
Si m < 0:	$\mathbf{90^0 < \alpha < 180^0}$	α: Ángulo obtuso
Si m = 0:	$\mathbf{\alpha = 0^0}$ **o** $\mathbf{\alpha = 180^0}$	α: Ángulo llano o plano
Nota: Si x = c, c ∈ R; $m = \tan(90) = \infty$,		$\mathbf{\alpha = 90^0}$ Ángulo recto

Observaciones para la Figura 3 :

Figura 3
Pendiente de la recta



1.- Si n = 0 la recta es de la forma y = mx, se le conoce como función lineal y pasa por el origen de coordenadas.

2.- Si n ≠ 0 la recta es de la forma y = mx + n, se le conoce como función afín.

3.- Dos rectas son paralelas, si tienen la misma pendiente y distinta ordenada en el origen.

4.- Dos rectas son secantes si tienen distinta pendiente. Y para determinar el punto donde se cortan se resuelve el sistema de ambas rectas.

Ejemplos:

1.- Representar gráficamente la función f(x) = -2x + 4

- Para dibujar una recta f(x) = mx + n, se necesita estudiar la pendiente m, que nos dirá si es creciente o decreciente la función.
- Determinar el punto de corte con el eje de ordenadas que es (0, n)

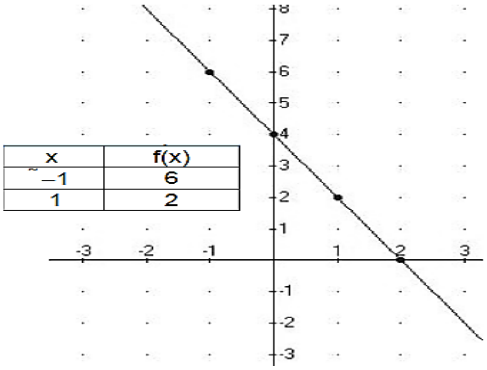
- Determinar dos puntos de la función.
- Determinar el punto de corte con el eje de abscisas, f(x) = 0. Para lo cual, se resuelve la ecuación mx + n = 0

Solución:

La pendiente de la recta es m = −2, por tanto, la función es decreciente.

La ordenada en el origen es n = 4, por tanto, la función corta al eje de ordenadas en el punto (0,4).

Determinamos dos puntos de la recta:



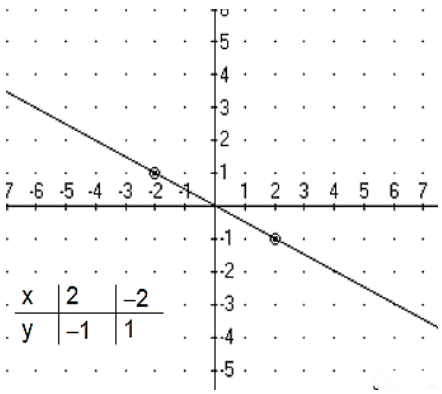
El punto de corte con el eje de abscisas es: f(x) = 0, -2x + 4 = 0, x = 2 es decir, el punto (2, 0).

2.- Dada la ecuación $y = \frac{-1}{2}x$, realizar el estudio respectivo de la recta.

Solución:

Es una función lineal, con la pendiente negativa m = $\frac{-1}{2}$. Entonces la recta pasa por el origen de coordenadas, es decreciente y pasa por el segundo y cuarto cuadrante.

Para graficar la función, hacemos una tabla de valores:



3.- Calcula el valor de a para que la recta $y = ax + (2a + 3)$ sea paralela a la recta y = 2x + 5. ¿Qué distancia vertical hay entre ambas rectas?

Solución:

Para que dos rectas sean paralelas tienen que tener la misma pendiente.

La pendiente de la primera recta es : $m = a$
La pendiente de la segunda és : $m = 2$ } si igualamos $a = 2$.

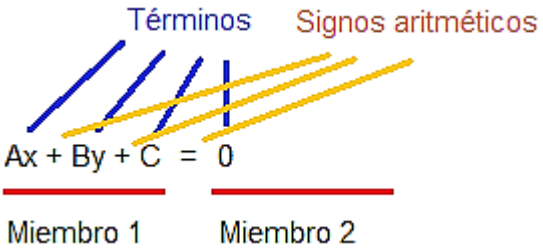
Substituimos a por 2: $y = 2x + 4 + 3 \Rightarrow y = 2x + 7$

Ya tenemos las dos rectas: $\begin{cases} y = 2x + 5 \\ y = 2x + 7 \end{cases}$. La primera corta al eje Y en (0, 5) y la segunda en (0, 7). La distancia vertical entre ambas es $7 - 5 = 2$.

Despeje de variables

Para el despeje de variables debemos tener en cuenta algunos aspectos:

Obsérvese que la ecuación: $Ax + By + C = 0$, está formada por:



- Al Miembro 1, se le conoce también como lado izquierdo de la expresión algebraica o ecuación.
- Al Miembro 2, se le conoce también como lado derecho de la expresión algebraica o ecuación. El Miembro 2, podría estar formado por términos similares a los del Miembro 1.
- Ax, By, C, incluido el número 0; son los términos de la ecuación
- A, B, C, {0} ∈ R
- Entre A y la variable x, existe un signo aritmético, aunque no se lo pinte o escriba, es la multiplicación; lo mismo entre B y la variable y.
- A la variable x, de hoy en adelante se le denomina variable independiente; es decir es la variable que puede asumir o tomar cualquier valor ∈ R. Al conjunto de valores que asumirá la variable x, se le denomina Dominio o Conjunto de salida.

- A la variable y, de hoy en adelante se le denomina variable dependiente; es decir es la variable que puede asumir o tomar cualquier valor ∈ R, pero en dependencia o función de la variable independiente. Al conjunto de valores que asumirá la variable y, se le denomina Rango o Conjunto de llegada.

Considerando lo indicado, para el despeje de cualquiera de las variables se aplicarán las siguientes reglas (Lexus_Editores, 2008):

Regla 1.-	Si a ambos miembros de una ecuación, se suma o resta una misma expresión o un mismo número, resulta una ecuación equivalente a la primera.

Ejemplo:

Sea la ecuación A = B donde A y B son el primer y segundo miembro y m una cantidad cualesquiera, entonces: $A \pm m = B \pm m$

Regla 2.-	Si a ambos miembros de una ecuación, se multiplica o divide por un mismo número o por una misma expresión independiente de x ($m \neq 0$, $m \neq \infty$) se obtiene una ecuación que es equivalente a la primera.

Ejemplo:

Sea la ecuación: A = B. Multiplicando por $m \neq 0$, $m \neq \infty$; se tiene: $A \cdot m = B \cdot m$

dividiendo entre $m \neq 0$, $m \neq \infty$; se tiene: $\frac{A}{m} = \frac{B}{m}$

Regla 3.-	Si a ambos miembros de una ecuación, se eleva a una misma potencia o se extrae una misma raíz, la ecuación que resulta es parcialmente equivalente a la primera.

Ejemplo:

Sea la ecuación: $A = B$ o: $A - B = 0$

Elevando los dos miembros a la m: $A^m = B^m$ o: $A^m - B^m = 0$

factorizando por cocientes notables:

$A^m - B^m = (A - B)(A^{m-1} + A^{m-2} B + A^{m-3}B^2 + \ldots + B^{m-1}) = 0$

de donde, se obtiene: $A - B = 0$ $A = B$

y: $A^{m-1} + A^{m-2} B + A^{m-3}B^2 + \ldots + B^{m-1} = 0$

Ecuación donde podrían aparecer soluciones extrañas: Se denomina soluciones extrañas, a aquellas que se introducen o se pierden en una ecuación al realizar ciertas operaciones.

En forma análoga, se obtiene para la raíz.

Ejemplos:

1.- Resolver:

$$x - 4 = \sqrt{x^2 - 8}$$

$$(x - 4)^2 = \left(\sqrt{x^2 - 8}\right)^2$$

$$x^2 - 8x + 16 = x^2 - 8$$

$$24 = 8x$$

$$x = 3$$

2.- Resolver

$$2\sqrt{(x - a)^2} = \sqrt{x - a}\ \sqrt{x - b}$$

$$2\sqrt{(x - a)^2} = \sqrt{x - a}\ \sqrt{x - b} \quad \text{dividiendo por } \sqrt{x - a}:$$

$$2\sqrt{x - a} = \sqrt{x - b} \qquad (I)$$

Observese que se ha eliminado la solución: $x - a = 0$, $x = a$

Elevando al cuadrado (I):

$$4(x - a) = x - b$$

$$\therefore \quad x = \frac{4a - b}{3}$$

Si en lugar de una ecuación, según (Costa, Rossignoli, Sorichetti, & Vampa, 2018); si se tienen varias ecuaciones del tipo general: $a_1x_1+a_2x_2 +...+ a_nx_n = b$, con las mismas incógnitas o variables, se obtiene un sistema de ecuaciones lineales:

Sistemas de ecuaciones lineales

Definición de sistemas de m ecuaciones lineales con n variables

Un sistema de m ecuaciones lineales con n variables x_1; x_2; ….; x_n, es un sistema de m ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= b_m \end{cases}$$

donde los coeficientes: a_{11}; a_{12}; ….; a_{mn} y b_1; b_2; …….; $b_m \in \mathbb{R}$ o complejos ($\mathbb{C}$).

El sistema puede escribirse también en forma compacta como: $\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1, \ldots, m$

Ejemplos de sistemas de ecuaciones:

1. $\begin{cases} x_1 + x_2 = 1 \\ 2x_1 - 3x_2 = 12 \end{cases}$ es un sistema 2×2 2. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = -4 \\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 11 \end{cases}$ es un sistema 2×3

3. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ -x_1 - 3x_2 + x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$ es un sistema 3×3 , homogéneo.

Las variables de las ecuaciones no necesariamente podrían escribirse con: x_1, x_2, …; podrían tomar otras nominaciones, por ejemplo: x, y, z, w

Usualmente para las variables, se acostumbra de manera simbólica, utilizar las últimas letras del alfabeto castellano y a las constantes con las primeras letras.

La nomenclatura de las variables, de la siguiente manera: x_1, x_2, …; son de utilidad para la estructuración de algoritmos informáticos, que facilitan la programación y la obtención de resultados.

Solución de un sistema de ecuaciones lineales mxn

Según (Kolman & Hill, 2006), una solución del sistema lineal

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

es una sucesión de n números $s_1, s_2, \ldots, s_n$, que forman una n-upla $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$ y que deben satisfacer a cada ecuación lineal del sistema; reemplazándose o sustituyéndose cada variable, así: $x_1 = s_1, x_2 = s_2, \ldots, x_n = s_n$

Estas n-upla $(s_1, s_2, \ldots, s_n)$; son las soluciones de sistemas de ecuaciones lineales, visualizándoles de manera gráfica, son los puntos coordenados.

Por ejemplo:

De la forma: (s_1, s_2) se grafica en el plano cartesiano XY, correspondiendo a la solución de un sistema de ecuaciones lineales 2x2.

De la forma: (s_1, s_2, s_3) se grafica en el espacio XYZ, correspondiendo a la solución de un sistema de ecuaciones lineales 3x3.

Nota: La graficación de este tipo de puntos coordenados o figuras, para más de tres dimensiones, es muy complejo y que por defectos visuales y tecnológicos, no ha sido posible hacerlo. Por el momento, teórica y mentalmente se supone que se puede establecer otras dimensiones perpendiculares a las existentes de la graficación espacial y con esa suposición, se podría establecer la posible ubicación de uplas de más de 3 dimensiones.

Ejemplos (Vélez, s.f.):

1.- $5x - 3x + 2x = -16$ es una ecuación lineal en tres variables.

(2, 8, −1): es una solución de la ecuación, ya que $5(2) - 3(8) + 2(-1) = -16$

(1, 5, − 3): también es solución de la ecuación, ya que $5(1) - 3(5) + 2(-3) = -16$

(4, −8, 2): NO es solución de la ecuación, ya que $5(4) - 3(-8) + 2(2) = 48 \neq -16$

2.-

$(1,-2,4)$ es una solución del sistema $\begin{cases} 2x_1+x_2-x_3=-4 \\ x_1-3x_2+x_3=11 \end{cases}$, ya que

$$\begin{cases} 2(1)+(-2)-(4)=-4 \\ (1)-3(-2)+(4)=11 \end{cases}$$

3.-

$$\begin{cases} 3x_1+2x_2=5 \\ -x_1-4x_2=1 \end{cases}$$

$\left(\frac{11}{5},-\frac{4}{5}\right)$ es solución del sistema $\begin{cases} 3x_1+2x_2=5 \\ -x_1-4x_2=1 \end{cases}$, ya que

$$3\left(\frac{11}{5}\right)+2\left(-\frac{4}{5}\right)=\frac{33}{5}-\frac{8}{5}=\frac{25}{5}=5 \quad \text{y}$$

$$-\left(\frac{11}{5}\right)-4\left(-\frac{4}{5}\right)=-\frac{11}{5}+\frac{16}{5}=\frac{5}{5}=1$$

Tipos de soluciones:

Según (Costa, Rossignoli, Sorichetti, & Vampa, 2018), (Vélez, s.f.):

Un sistema con al menos una solución se denomina **sistema compatible o consistente.**

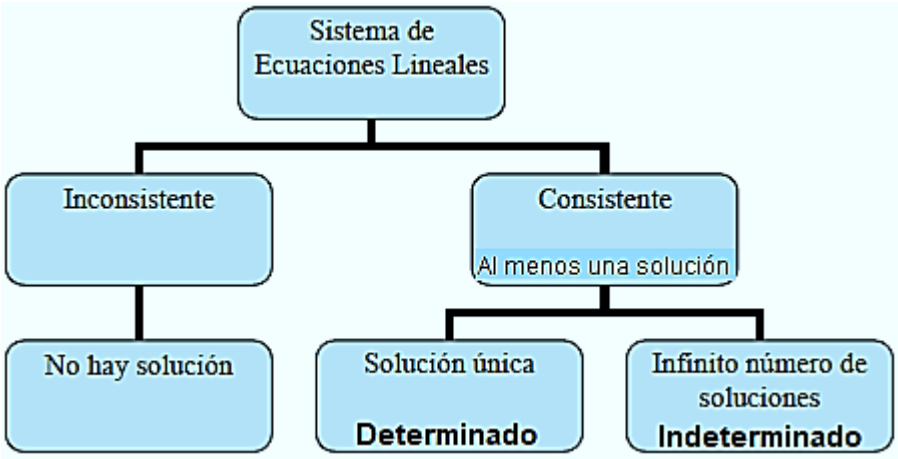
Si la **solución es única**, se lo denomina **sistema compatible determinado.**

Si existen **infinitas soluciones** se lo llama sistema **compatible indeterminado.**

Un sistema **sin solución** se llama **sistema incompatible o inconsistente.**

Al conjunto de todas las soluciones de un sistema se lo llama **conjunto solución.**

Sistema: { Compatible: { Determinado / Indeterminado ; Incompatible }



Ejemplos (Costa, Rossignoli, Sorichetti, & Vampa, 2018):

1.-

(a)	(b)	(c)
$x_1 + 2x_2 = 5$ $2x_1 + 3x_2 = 8$	$x_1 - x_2 + x_3 = 2$ $2x_1 + x_2 - x_3 = 4$	$x_1 + x_2 = 2$ $x_1 - x_2 = 4$ $x_1 + 2x_2 = 0$
(2×2)	(2×3)	(3×2)

Verificamos que:

- En (a) (sistema cuadrado); el par ordenado (x_1; x_2) = (1; 2) satisface ambas ecuaciones, por lo tanto es solución. Se puede vericar también que es la única solución.
- En (b) (sistema subdeterminado); la terna (x_1; x_2; x_3) = (2; 0; 0) satisface ambas ecuaciones. Pero también la terna (x_1; x_2; x_3) = (2; α; α) donde α es un número real cualquiera, satisface ambas ecuaciones. En este caso, existen pues infinitas soluciones porque hay infinitas ternas (3-uplas) que satisfacen el sistema.
- En (c) (sistema sobredeterminado); no existe solución: Si sumamos las dos primeras ecuaciones obtenemos $2x_1 = 6$, de donde $x_1 = 3$. Utilizando ahora la primera o la segunda ecuación, se obtiene $x_2 = -1$. Pero estos valores implican que $x_1 + 2x_2 = 1$, lo que está en contradicción con la última ecuación. Por lo tanto, este sistema no tiene un par (x_1; x_2) que satisfaga estas tres ecuaciones a la vez.

2.-

(a_1)	(a_2)	(b)	(c)
$x_1 + 2x_2 = 5$	$x_1 + 2x_2 = 5$	$x_1 - x_2 + x_3 = 2$	$x_1 + x_2 = 2$
$2x_1 + 4x_2 = 10$	$2x_1 + 4x_2 = 0$	$x_1 - x_2 + x_3 = 3$	$x_1 - x_2 = 4$
			$x_1 + 2x_2 = 1$
(2×2)	(2×2)	(2×3)	(3×2)

Verificamos que:

- En (a_1) (sistema cuadrado); la segunda ecuación, es la primera multiplicada por dos, por lo que no aporta una nueva condición. Es fácil verificar entonces que todo par ordenado de la forma (x_1; x_2) = (5 - 2α; α) es solución del sistema para cualquier real α, por lo que el sistema posee infinitas soluciones.
- En (a_2) (sistema cuadrado); si: $x_1 + 2x_2 = 5$, entonces $2x_1 + 4x_2 = 2(x_1 + 2x_2) = 2(5) = 10$ no puede ser = 0. Por lo que el sistema es incompatible.
- En (b) (sistema subdeterminado); es claro que las dos ecuaciones son incompatibles, pues si $x_1 – x_2 + x_3 = 2$, no puede ser a la vez = 3. Este sistema es entonces incompatible, a pesar de ser subdeterminado por tener más variables que ecuaciones.
- En (c) (sistema sobredeterminado); en el ejemplo anterior (b), las dos primeras ecuaciones implican $x_1 = 3$, $x_2 = -1$. Y estos valores, ahora sí satisfacen la tercera ecuación. Por lo tanto, este sistema es compatible con solución única (x_1; x_2) = (3; -1), a pesar de que es sobredeterminado y tener más ecuaciones que variables.

3.- Adelantándonos un poco a la resolución de un sistema de ecuaciones lineales por el método gráfico; consideremos (Kolman & Hill, 2006) ahora, un sistema lineal con las variables x e y:

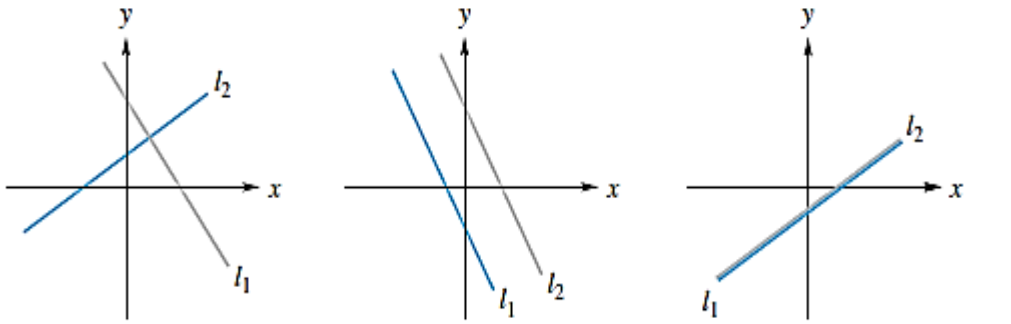
$a_1x + b_1y = c_1$ (1)

$b_1x + b_2y = c_2$

La gráfica de cada una de estas ecuaciones es una línea recta, que les notamos por L_1 y L_2, respectivamente. Si $x = s_1$, $y = s_2$ es una solución del sistema lineal (1), entonces el punto

(s_1, s_2) pertenece a ambas rectas L_1 y L_2. De manera recíproca, si el punto (s_1, s_2) está en ambas rectas L_1 y L_2, entonces $x = s_1$, $y = s_2$ es una solución para el sistema lineal (1). (Vea la Figura 4)

Figura 4
Soluciones de un sistema de ecuaciones lineales 2x2



Fuente: (Kolman & Hill, 2006)

En consecuencia, hemos llegado a las mismas tres posibilidades mencionadas, siguiendo una alternativa geométrica:

1. El sistema tiene una solución única; esto es, las rectas L_1 y L2 se intersecan exactamente en un punto.
2. El sistema no tiene solución; es decir, las rectas L_1 y L_2 no se intersecan.
3. El sistema tiene un número infinito de soluciones; en otras palabras, las rectas L_1 y L_2 coinciden.

Ahora, consideremos un sistema lineal de tres ecuaciones con tres variables, x, y, z:

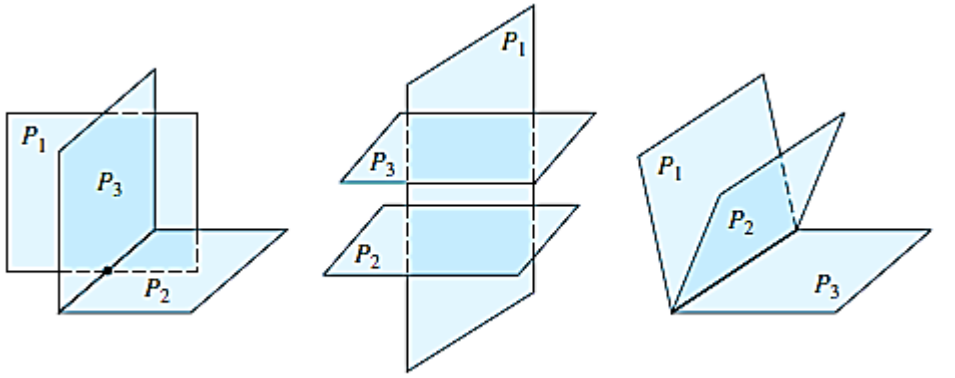
$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$ (2)

$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$

$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$

La gráfica de cada una de estas ecuaciones lineales es un plano en un sistema espacial, y se les nota como P_1, P_2 y P_3, respectivamente. El sistema lineal (2), puede tener una solución única, no tener solución o tener una infinidad de soluciones. Estas situaciones se ilustran en la Figura 5.

Figura 5
Soluciones gráficas de sistemas de ecuaciones lineales 3x3



(a) Una única solución (b) No hay solución (c) Una infinidad de soluciones

Fuente: (Kolman & Hill, 2006)

Para comprender, imagine las paredes o planos de una habitación que se intersecan en un único punto, una esquina de la habitación; de esta manera, el sistema lineal tiene una solución única. Ahora, imagine los planos como si se tratara de las páginas de un libro, cuando se sostiene abierto; tres de sus páginas se intersecan en una línea recta que es el lomo; en este caso, el sistema lineal tiene un número infinito de soluciones.

Por otra parte, cuando se cierra el libro, aparentemente las tres páginas son paralelas y no se intersecan, por lo que podemos decir que el sistema lineal no tiene solución.

Según el orden de un sistema lineal, este se clasica en:

Sistema cuadrado:	Si **m = n**, es decir, si tiene el mismo número de ecuaciones que de variables.
Sistema rectangular:	Si **m ≠ n**; para este caso, hay dos alternativas:

a)	Si el sistema tiene más ecuaciones que variables (**m > n**) se denomina **sobredeterminado**.
b)	Si el sistema tiene menos ecuaciones que variables (**m < n**) se denomina **subdeterminado**.

Sistemas de ecuaciones lineales homogéneos

Segùn (Costa, Rossignoli, Sorichetti, & Vampa, 2018), en el sistema de ecuaciones lineales mxn, si todas las constantes b_i =0

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

el nuevo sistema de ecuaciones lineales se denomina **homogéneo**.

Se lo puede escribir, también como:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = 0,\ i = 1, \ldots, m.$$

Es obvio que estos sistemas siempre poseen al menos la *solución trivial o nula*

$$x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$$

Por lo tanto, un sistema homogéneo **siempre es compatible**. Puede ser:

I. Compatible determinado (la solución trivial es la única solución)

II. Compatible indeterminado (solución trivial + infinitas soluciones no triviales)

$$\text{Sistema homogéneo: } \begin{cases} \text{Compatible determinado} \\ \text{Compatible indeterminado} \end{cases}$$

Ejemplo:

1.- En el siguiente sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = 0 \\ -x_1 - 2x_2 = 0 \end{cases}$$

Se puede verificar que el par ordenado (x_1; x_2) = (0; 0) es solución del sistema, es una solución trivial o nula. También, es solución cualquier par de la forma (-2α; α) con α un número real. Consecuentemente, el sistema posee infinitas soluciones, y no sólo la solución trivial, siendo entonces compatible indeterminado.

2.- En cambio, en el siguiente sistema homogéneo,

$$\begin{cases} 3x + 2y + z = 0 \\ y + z = 0 \\ -2z = 0 \end{cases}$$

Se puede vericar que tiene solución única: (x; y; z) = (0; 0; 0), por lo que, este sistema es compatible determinado.

Sistemas equivalentes

Definición: Dos o más sistemas de ecuaciones lineales, con el mismo conjunto de variables o incógnitas, se dice que son equivalentes, sí y sólo sí, tienen el mismo conjunto solución.

Ejemplo:

(a)	(b)
$3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$	$3x_1 + 2x_2 - x_3 = -2$
$x_2 = 3$	$-3x_1 - x_2 + x_3 = 5$
$2x_3 = 4$	$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$

Estos dos sistemas de ecuaciones lineales 3x3, son equivalentes. Ambos sistemas, tienen 3 variables y el mismo conjunto solución: (x_1; x_2; x_3) = (-2; 3; 2). Observar, que la primera ecuación de ambos sistemas es la misma. En (a) las restantes ecuaciones son x_2 = 3 y x_3 = 2; en (b), si sumamos la primera ecuación a la segunda, se obtiene x_2 = 3 y si restamos la primera ecuación a la tercera, se obtiene $2x_3$ = 4, o x_3 = 2.

Por otro lado, cualquier solución del sistema (a), debe ser también solución del sistema (b), porque restando en (a) la primera ecuación a la segunda, se obtiene la segunda ecuación del sistema (b), y sumando la primera y tercera ecuación del sistema (a), se obtiene la tercera ecuación del sistema (b). Es decir, que realizando operaciones algebraicas sobre las ecuaciones de un sistema, es posible pasar o transformar al otro sistema.

Métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales

Método de igualación

El procedimiento para aplicar este método es:

- Se despeja la misma variable en las dos ecuaciones.
- Se igualan las expresiones despejadas y se obtiene una ecuación lineal para la otra variable.
- Se resuelve la ecuación lineal.
- Se sustituye este valor en cualquiera de las dos expresiones despejadas a fin de obtener el valor de la otra.
- Se realiza la comprobación.

Ejemplos:

1.-

$$\left.\begin{aligned} 4x-2y=10 \\ 3x+5y=14 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

De la primera ecuación se despeja x: $x=\dfrac{10+2y}{4}=\dfrac{5+y}{2}$

de la segunda ecuación también se despeja x: $x=\dfrac{14-5y}{3}$

se igualan estas dos últimas ecuaciones: $\dfrac{5+y}{2}=\dfrac{14-5y}{3}$

resolviendo para y :

$$3(5+y)=2(14-5y)$$
$$15+3y=28-10y$$
$$3y+10y=28-15$$
$$13y=13 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{13}{13}=1$$

sustituyendo en la primera ecuación despejada, se obtiene el valor de la otra incógnita:

$$x=\frac{5+1}{2}=\frac{6}{2}=3$$

Por lo tanto: $x=3$ y $y=1$. Comprobación: $\left.\begin{aligned} 4(3)-2(1)=12-2=10 \\ 3(3)+5(1)=9+5=14 \end{aligned}\right\}$

2.-

$$\left.\begin{aligned} x-\frac{4x+1}{9}=\frac{2y-5}{3} \\ y-\frac{3y+2}{7}=\frac{x+18}{10} \end{aligned}\right\}$$

Solución.

La primera ecuación, se multiplica por 9:

$$9\left(x-\frac{4x+1}{9}\right)=9\left(\frac{2y-5}{3}\right) \Rightarrow 9x-4x-1=6y-15 \Rightarrow \quad 5x-6y=-14$$

la segunda ecuación, se multiplica por 70 :

$$70\left(y-\frac{3y+2}{7}\right)=70\left(\frac{x+18}{10}\right) \Rightarrow 70y-30y-20=7x+126 \Rightarrow -7x+40y=146$$

el sistema se convierte a su forma estándar: $\left.\begin{aligned} 5x-6y=-14 \\ -7x+40y=146 \end{aligned}\right\}$

de la primera ecuación se despeja y : $y=\dfrac{-14-5x}{-6}$

de la segunda ecuación también se despeja y : $y=\dfrac{146+7x}{40}$

se igualan estas dos últimas ecuaciones: $\dfrac{-14-5x}{-6}=\dfrac{146+7x}{40}$

resolviendo para x :

$$40(-14-5x)=-6(146+7x) \Rightarrow -560-200x=-876-42x \Rightarrow -200x+42x=-876+560$$

$$-158x=-316 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-316}{-158}=2$$

sustituyendo en la primera ecuación despejada, se obtiene el valor de la otra variable:

$$y=\frac{146+7(2)}{40}=\frac{146+14}{40}=\frac{160}{40}=4$$

Por lo tanto: $x=2$ y $y=4$. Comprobación: $2-\dfrac{4(2)+1}{9}=2-\dfrac{8+1}{9}=2-\dfrac{9}{9}=2-1=1$

$$\frac{2(4)-5}{3}=\frac{8-5}{3}=\frac{3}{3}=1$$

1 = 1

$$4-\frac{3(4)+2}{7}=4-\frac{12+2}{7}=4-\frac{14}{7}=4-2=2$$

$$\frac{2+18}{10}=\frac{2+18}{10}=\frac{20}{10}=2$$

2 = 2

Método de suma y resta o de eliminación de Gauss

El procedimiento para aplicar este método es:

- Se multiplica cada ecuación por constantes de modo que los coeficientes de la variable a eliminar resulten iguales en valor absoluto pero con signos opuestos.
- Se suman ambas ecuaciones para obtener una nueva ecuación en términos solamente de la otra variable.
- Se resuelve la ecuación lineal.
- Se despeja la otra variable de cualquiera de las ecuaciones del sistema.
- Se sustituye el valor obtenido en la expresión despejada para obtener el valor de la otra.
- Se realiza la comprobación.

Ejemplos.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones por el método de eliminación:

1.-

$$\left.\begin{array}{r} 4x-2y=2 \\ -5x+4y=-13 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se multiplica la primera ecuación por 2 y se suma a la segunda:

$$\left.\begin{array}{r} 8x-4y=4 \\ -5x+4y=-13 \\ \hline 3x \quad\quad =-9 \end{array}\right\}$$

$$x=\frac{-9}{3}=-3$$

de la primera ecuación se despeja la otra variable y se sustituye el valor obtenido:

$$y=\frac{2-4x}{-2}=-1+2x=-1+2(-3)=-1-6=-7$$

Por lo tanto: $x=-3$ y $y=-7$. Comprobación:

$$\left.\begin{array}{l} 4(-3)-2(-7)=-12+14=2 \\ -5(-3)+4(-7)=15-28=-13 \end{array}\right\}$$

2.-

$$\left.\begin{array}{r} -8x+14y=-20 \\ -5x+7y=-16 \end{array}\right\}$$

Solución:

Se multiplica la segunda ecuación por -2 y se suma a la primera:

$$\left.\begin{array}{r} -8x+14y=-20 \\ 10x-14y=32 \\ \hline 2x \quad\quad =12 \end{array}\right\}$$

$$x=\frac{12}{2}=6$$

de la primera ecuación se despeja la otra variable y se sustituye el valor obtenido:

$$y=\frac{-20+8x}{14}=\frac{-10+4x}{7}=\frac{-10+4(6)}{7}=\frac{-10+24}{7}=\frac{14}{7}=2$$

Por lo tanto: $x=6$ y $y=2$. Comprobación:

$$\left.\begin{array}{l} -8(6)+14(2)=-48+28=-20 \\ -5(6)+7(2)=-30+14=-16 \end{array}\right\}$$

Para resolver sistemas de ecuaciones lineales 3x3, por este método de suma o resta, se aplica el siguiente procedimiento:

- Tomando como base el signo de una de las variables de una ecuación, se procura que en las otras dos ecuaciones esa variable tenga la misma magnitud y signo contrario, para que al sumarlas miembro a miembro se elimine dicha variable, dando lugar a que en todas las ecuaciones desaparezca, excepto en una.
- Se procura que otra de las variables tenga el mismo coeficiente en cualquiera de las dos ecuaciones reducidas para que, al sumarlas miembro a miembro, se elimine dicha variable, dando lugar a una ecuación con sólo la tercera variable, misma que se despeja.
- Con un valor conocido, se sustituye en la ecuación reducida para obtener el valor de otra variable a través de un despeje.
- Con los valores de dos variables se sustituye en la ecuación que no fue reducida, y mediante un despeje se obtiene el valor faltante.

Ejemplo.

Resolver los siguientes sistemas aplicando el método de eliminación de Gauss.

1.-

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-5z&=-13\\ 4x+5y-2z&=3\\ -6x-2y-3z&=-12 \end{aligned}\right\}$$

Solución.

La primera ecuación se multiplica por - 2 y se suma a la segunda.

La primera ecuación se multiplica por 3 y se suma a la tercera:

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-5z&=-13\\ -y+8z&=29\\ 7y-18z&=-51 \end{aligned}\right\}$$

la segunda ecuación se multiplica por 7 y se suma a la tercera:

$$\left.\begin{aligned} 2x+3y-5z&=-13\\ -y+8z&=29\\ 38z&=152 \end{aligned}\right\}$$

de la tercera ecuación se despeja $z:\ z=\dfrac{152}{38}=4$

se sustituye este valor en la segunda ecuación y se despeja y :

$$-y+8(4)=29\ \Rightarrow -y+32=29\Rightarrow\ -y=29-32=-3\ \Rightarrow y=\frac{-3}{-1}=3$$

estos valores, se sustituyen en la primera ecuación y se despeja x:

$$2x+3(3)-5(4)=-13\Rightarrow 2x+9-20=-13\Rightarrow 2x=-13-9+20=-2\ \Rightarrow x=\frac{-2}{2}=-1$$

Por lo tanto la solución del sistema es: x = -1, y = 3, z = 4

Comprobación:
$$\left.\begin{aligned} 2(-1)+3(3)-5(4) &= -2+9-20=-13 \\ 4(-1)+5(3)-2(4) &= -4+15-8=3 \\ -6(-1)-2(3)-3(4) &= 6-6-12=-12 \end{aligned}\right\}$$

2.-

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y-4z &= 20 \\ 12x+3y+5z &= 9 \\ -9x-y-2z &= -11 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

La primera ecuación se multiplica por - 4 y se suma a la segunda.

La primera ecuación se multiplica por 3 y se suma a la tercera:

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y-4z &= 20 \\ 11y+21z &= -71 \\ -7y-14z &= 49 \end{aligned}\right\}$$

la tercera ecuación se divide por 7:

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y-4z &= 20 \\ 11y+21z &= -71 \\ -y-2z &= 7 \end{aligned}\right\}$$

la tercera ecuación se multiplica por 11 y se suma a la segunda:

$$\left.\begin{aligned} 3x-2y-4z &= 20 \\ -z &= 6 \\ -y-2z &= 7 \end{aligned}\right\}$$

de la segunda ecuación se despeja z : $z=\frac{6}{-1}=-6$

se sustituye este valor en la tercera ecuación y se despeja y:

$$-y-2(-6)=7 \Rightarrow -y+12=7 \Rightarrow -y=7-12=-5 \Rightarrow y=\frac{-5}{-1}=5$$

estos valores, se sustituyen en la primera ecuación y se despeja x :

$$3x-2(5)-4(-6)=20 \Rightarrow 3x-10+24=20 \Rightarrow 3x=20+10-24=6 \Rightarrow x=\frac{6}{3}=2$$

Por lo tanto la solución del sistema es: x = 2, y = 5, z = -6

Comprobación:
$$\left.\begin{aligned} 3(2)-2(5)-4(-6) &= 6-10+24=20 \\ 12(2)+3(5)+5(-6) &= 24+15-30=9 \\ -9(2)-5-2(-6) &= -18-5+12=-11 \end{aligned}\right\}$$

Método de sustitución

El procedimiento para aplicar este método es:

- Despejar una de las variables de una de las ecuaciones.
- Sustituir la expresión despejada en la otra ecuación.
- Se resuelve la ecuación lineal, generalmente fraccionaria.
- Se sustituye este valor en la expresión despeja a fin de obtener el valor de la otra.
- Se realiza la comprobación.

Ejemplos:

1.-

$$\left.\begin{aligned} 9x+7y=-17 \\ 4x+2y=-12 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

De la primera ecuación se despeja x: $x=\dfrac{-17-7y}{9}$

se sustituye en la segunda ecuación: $4\left(\dfrac{-17-7y}{9}\right)+2y=-12$

multiplicando por 9: $9\left[4\left(\dfrac{-17-7y}{9}\right)+2y\right]=9(-12) \Rightarrow 4(-17-7y)+18y=-108$

$-68-28y+18y=-108 \Rightarrow -28y+18y=-108+68 \Rightarrow -10y=-40$

$y=\dfrac{-40}{-10}=4$

sustituyendo en la ecuación despejada: $x=\dfrac{-17-7y}{9}=\dfrac{-17-7(4)}{9}=\dfrac{-17-28}{9}=\dfrac{-45}{9}=-5$

Por lo tanto: $x=-5$ y $y=4$. Comprobación: $\left.\begin{aligned} 9(-5)+7(4)=-45+28=-17 \\ 4(-5)+2(4)=-20+8=-12 \end{aligned}\right\}$

2.-

$$\left.\begin{aligned} -2x+3y=9 \\ 7x-9y=-31 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

De la primera ecuación se despeja x: $x=\dfrac{9-3y}{-2}$

se sustituye en la segunda ecuación: $7\left(\dfrac{9-3y}{-2}\right)-9y=-31$

multiplicando por -2: $(-2)\left[7\left(\dfrac{9-3y}{-2}\right)-9y\right]=(-2)(-31) \Rightarrow 7(9-3y)+18y=62$

$63-21y+18y=62 \Rightarrow -21y+18y=62-63 \Rightarrow -3y=-1$

$$y=\frac{-1}{-3}=\frac{1}{3}$$

sustituyendo en la ecuación despejada: $x=\frac{9-3y}{-2}=\frac{9-3\left(\frac{1}{3}\right)}{-2}=\frac{9-1}{-2}=\frac{8}{-2}=-4$

Por lo tanto: $x=-4$ y $y=\frac{1}{3}$. Comprobación:

$$\left.\begin{aligned}-2(-4)+3\left(\frac{1}{3}\right)&=8+1=9\\ 7(-4)-9\left(\frac{1}{3}\right)&=-28-3=-31\end{aligned}\right\}$$

Método de determinantes

El procedimiento para aplicar este método es:

Dado un arreglo de números de la forma: $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix}$

su *determinante*: $\Delta = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}$; $\Delta = +a_{11}a_{22}-a_{21}a_{12}$

Al producto de esta diagonal, le anteponemos un signo -

Al producto de esta diagonal, le anteponemos un signo +

Ejemplos.

Calcular los siguientes determinantes:

1) $\begin{vmatrix}5 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=5(4)-3(2)=20-6=14$

2) $\begin{vmatrix}-2 & -5\\ 1 & 6\end{vmatrix}=-2(6)-1(-5)=-12+5=-7$

3) $\begin{vmatrix}-9 & 7\\ -4 & -1\end{vmatrix}=(-9)(-1)-(-4)(7)=9+28=37$

4) $\begin{vmatrix}\frac{2}{5} & 0\\ -3 & 10\end{vmatrix}=\frac{2}{5}(10)-(-3)(0)=4+0=4$

Dado un sistema de la forma:

$$\left.\begin{aligned}a_{11}x+a_{12}y&=b_1\\ a_{21}x+a_{22}y&=b_2\end{aligned}\right\}$$

- El determinante del Sistema Δ, es el determinante del arreglo formado por los coeficientes de las incógnitas.
- El determinante de la variable Δx, es el que se obtiene sustituyendo en el arreglo del sistema la columna de los coeficientes de la variable x, por la columna de los términos independientes.

- El determinante de la incógnita ∆y, es el que se obtiene sustituyendo en el arreglo del sistema la columna de los coeficientes de la variable y, por la columna de los términos independientes.

La **Regla de Cramer**, establece que dado un sistema de ecuaciones lineales cuyos términos independientes son ǂ cero, el valor de cada variable, se obtiene dividiendo el determinante de la variable por el determinante del sistema:

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}} \qquad y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}}$$

Para la aplicaciòn de este método interesan, solo los coeficientes numéricos incluyendo su signo y, en ambos casos, el denominador es el mismo.

Ejemplos.

Por el método de determinantes, resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

1.-

$$\left.\begin{aligned} 2x-3y&=12 \\ -4x+5y&=-14 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$x=\frac{\begin{vmatrix} 12 & -3 \\ -14 & 5 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{12(5)-(-14)(-3)}{2(5)-(-4)(-3)}=\frac{60-42}{10-12}=\frac{18}{-2}=-9$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -4 & -14 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 5 \end{vmatrix}}=\frac{2(-14)-(-4)(12)}{2(5)-(-4)(-3)}=\frac{-28+48}{10-12}=\frac{20}{-2}=-10$$

Por lo tanto: $x=-9$ y $y=-10$. Comprobación: $\left.\begin{aligned} 2(-9)-3(-10)&=-18+30=12 \\ -4(-9)+5(-10)&=36-50=-14 \end{aligned}\right\}$

2.-

$$\left.\begin{aligned} 6x+4y&=7 \\ -9x+16y&=17 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$x=\frac{\begin{vmatrix}7 & 4\\ 17 & 16\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & 4\\ -9 & 16\end{vmatrix}}=\frac{7(16)-17(4)}{(6)(16)-(-9)(4)}=\frac{112-68}{96+36}=\frac{44}{132}=\frac{1}{3}$$

$$y=\frac{\begin{vmatrix}6 & 7\\ -9 & 17\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}6 & 4\\ -9 & 16\end{vmatrix}}=\frac{6(17)-(-9)(7)}{(6)(16)-(-9)(4)}=\frac{102+63}{96+36}=\frac{165}{132}=\frac{5}{4}$$

Por lo tanto: $x=\frac{1}{3}$ y $y=\frac{5}{4}$. Comprobación:

$$\left.\begin{aligned}6\left(\frac{1}{3}\right)+4\left(\frac{5}{4}\right)&=2+5=7\\ -9\left(\frac{1}{3}\right)+16\left(\frac{5}{4}\right)&=-3+20=17\end{aligned}\right\}$$

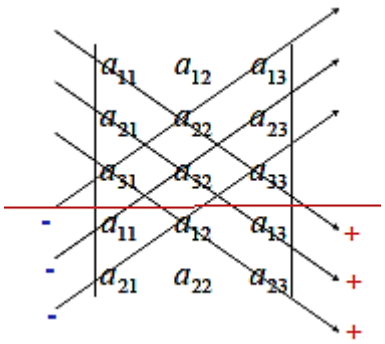
Para un sistema de ecuaciones lineales 3x3, se aplica el mètodo de determinantes considerando los siguientes aspectos:

Dado un arreglo de números de la forma: $\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix}$

su *determinante*: $\Delta = \begin{vmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{vmatrix}$

$$\Delta = +a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23}-a_{31}a_{22}a_{13}-a_{32}a_{23}a_{11}-a_{33}a_{21}a_{12}$$

Si al determinante se le agregan los dos primeros renglones y se efectúan los productos que indican las flechas se tiene que:



A la multiplicaciòn de los coeficientes de cada diagonal, que empiezan de izquierda a derecha, se les antepone un signo + y en el otro sentido a las diagonales que van de derecha a izquierda, se les antepone un signo -.

Ejemplos.

Calcular los siguientes determinantes:

1) $$\begin{vmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 4 & -1 & 9 \\ 8 & 6 & 7 \end{vmatrix} = 5(-1)(7)+4(6)(-2)+8(3)(9)-8(-1)(-2)-6(9)(5)-7(4)(3)$$
$$= -35-48+216-16-270-84 = -237$$

2) $$\begin{vmatrix} 7 & -2 & 8 \\ -5 & 3 & 4 \\ 1 & 6 & -1 \end{vmatrix} = 7(3)(-1)+(-5)(6)(8)+1(-2)(4)-1(3)(8)-6(4)(7)-(-1)(-5)(-2)$$
$$= -21-240-8-24-168+10 = -451$$

3) $$\begin{vmatrix} \frac{1}{2} & \frac{5}{2} & 6 \\ 10 & 2 & \frac{7}{2} \\ 4 & 0 & -8 \end{vmatrix} = \frac{1}{2}(2)(-8)+10(0)(6)+4\left(\frac{5}{2}\right)\left(\frac{7}{2}\right)-4(2)(6)-0\left(\frac{7}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)-(-8)(10)\left(\frac{5}{2}\right)$$
$$= -8+0+35-48-0+200 = 179$$

Dado un sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas de la forma:

$$\left.\begin{aligned} a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z &= b_1 \\ a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z &= b_2 \\ a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z &= b_3 \end{aligned}\right\}$$

- El determinante del Sistema ∆, es el determinante del arreglo formado por los coeficientes de las variables.
- El determinante de cualquier variable, es el que se obtiene sustituyendo en el arreglo del sistema, la columna de los coeficientes de esa variable por la columna de los términos independientes.

La Regla de Cramer establece que dado un sistema de ecuaciones lineales cuyos términos independientes son ǂ cero, el valor de cada variable se obtiene dividiendo el determinante de la variable por el determinante del sistema:

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \quad y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}; \quad z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}}$$

Cuando el determinante ∆ = 0, entonces el sistema es incompatible.

Ejemplo:

Obtener la solución de los siguientes sistemas aplicando la Regla de Cramer:

1.-

$$\left.\begin{aligned} 3x-5y-6z&=17\\ 4x+3y+8z&=-22\\ 2x+6y-7z&=42 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\Delta=\begin{vmatrix}3&-5&-6\\4&3&8\\2&6&-7\end{vmatrix}=3(3)(-7)+4(6)(-6)+2(-5)(8)-2(3)(-6)-6(8)(3)-(-7)(4)(-5)$$
$$=-63-144-80+36-144-140=-535$$

$$\Delta x=\begin{vmatrix}17&-5&-6\\-22&3&8\\42&6&-7\end{vmatrix}=17(3)(-7)+(-22)(6)(-6)+42(-5)(8)-42(3)(-6)-6(8)(17)-(-7)(-22)(-5)$$
$$=-357+792-1{,}680+756-816+770=-535$$

$$x=\frac{\Delta x}{\Delta}=\frac{-535}{-535}=1$$

$$\Delta y=\begin{vmatrix}3&17&-6\\4&-22&8\\2&42&-7\end{vmatrix}=3(-22)(-7)+4(42)(-6)+2(17)(8)-2(-22)(-6)-42(8)(3)-(-7)(4)(17)$$
$$=462-1{,}008+272-264-1{,}008+476=-1{,}070$$

$$y=\frac{\Delta y}{\Delta}=\frac{-1{,}070}{-535}=2$$

$$\Delta z=\begin{vmatrix}3&-5&17\\4&3&-22\\2&6&42\end{vmatrix}=3(3)(42)+4(6)(17)+2(-5)(-22)-2(3)(17)-6(-22)(3)-(42)(4)(-5)$$
$$=378+408+220-102+396+840=2{,}140$$

$$z=\frac{\Delta z}{\Delta}=\frac{2{,}140}{-535}=-4$$

Por lo tanto la solución del sistema es: x =1, y = 2, z = -4

Comprobación:

$$\left.\begin{aligned} 3(1)-5(2)-6(-4)&=3-10+24=17\\ 4(1)+3(2)+8(-4)&=4+6-32=-22\\ 2(1)+6(2)-7(-4)&=2+12+28=42 \end{aligned}\right\}$$

2.-

$$\left.\begin{aligned} -2x+3y+5z&=-23\\ 3x+8y-2z&=68\\ x-2y-6z&=20 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -2 & 3 & 5 \\ 3 & 8 & -2 \\ 1 & -2 & -6 \end{vmatrix} = (-2)(8)(-6)+3(-2)(5)+(1)(3)(-2)-(1)(8)(5)-(-2)(-2)(-2)-(-6)(3)(3)$$
$$= 96-30-6-40+8+54 = 82$$

$$\Delta x = \begin{vmatrix} -23 & 3 & 5 \\ 68 & 8 & -2 \\ 20 & -2 & -6 \end{vmatrix} = (-23)(8)(-6)+68(-2)(5)+(20)(3)(-2)-(20)(8)(5)-(-2)(-2)(-23)-(-6)(68)(3)$$
$$= 1{,}104-680-120-800+92+1{,}224 = 820$$

$$x = \frac{\Delta x}{\Delta} = \frac{820}{82} = 10$$

$$\Delta y = \begin{vmatrix} -2 & -23 & 5 \\ 3 & 68 & -2 \\ 1 & 20 & -6 \end{vmatrix} = (-2)(68)(-6)+3(20)(5)+(1)(-23)(-2)-(1)(68)(5)-(20)(-2)(-2)-(-6)(3)(-23)$$
$$= 816+300+46-340-80-414 = 328$$

$$y = \frac{\Delta y}{\Delta} = \frac{328}{82} = 4$$

$$\Delta z = \begin{vmatrix} -2 & 3 & -23 \\ 3 & 8 & 68 \\ 1 & -2 & 20 \end{vmatrix} = (-2)(8)(20)+3(-2)(-23)+(1)(3)(68)-(1)(8)(-23)-(-2)(68)(-2)-(20)(3)(3)$$
$$= -320+138+204+184-272-180 = -246$$

$$z = \frac{\Delta z}{\Delta} = \frac{-246}{82} = -3$$

Por lo tanto la solución del sistema es: x = 10, y = 4, z = -3

Comprobación:
$$\left.\begin{aligned} -2(10)+3(4)+5(-3) &= -20+12-15 = -23 \\ 3(10)+8(4)-2(-3) &= 30+32+6 = 68 \\ 10-2(4)-6(-3) &= 10-8+18 = 20 \end{aligned}\right\}$$

Análisis gráfico

Cada ecuación lineal de un sistema, representa una recta; lo que implica que la representación de un sistema de dos ecuaciones lineales con dos variables, consiste en un par de rectas.

Recordar, que:

- Si las dos rectas se cortan, el sistema es compatible determinado y las coordenadas del punto de corte son la solución del sistema.
- Si las rectas son coincidentes, es decir son la misma recta, el sistema es compatible indeterminado y sus soluciones corresponden a todos los puntos de la recta.
- Si las rectas son paralelas, el sistema es incompatible.

Para fines de graficación conviene despejar de ambas ecuaciones la variable y. Elaborar una tabla de valores en cuya cabecera, ubicar en la primera columna X y en la otra Y; luego para cada ecuación se pueden ir dando valores a X y realizando las respectivas operaciones, obtener los valores de Y. Este procedimiento, hay que realizar para las dos ecuaciones.

Como se considera que X es la variable independiente en cada ecuación lineal, significa que X puede tomar cualquier valor real, en otras palabras usted puede darle cualquier valor que se le ocurra.

Entonces dando valores a X y obtenido los valores de Y, se tienen puntos coordenados (x_1, y_1), (x_2, y_2), …., $(x_n; y_n)$; con estos puntos se puede graficar cada ecuación.

Nota: Hay que indicar, que para trazar una recta en un sistema cartesiano, es suficiente con dos puntos.

Ejemplos.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones aplicando el método gráfico:

1.-

$$\left.\begin{aligned} x+2y=5 \\ 3x-6y=-9 \end{aligned}\right\}$$

Solución:

Para la primera ecuación:

$$\text{Si } x=0 \quad \Rightarrow \quad 2y=5 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{5}{2}=2.5$$

$$\text{Si } y=0 \quad \Rightarrow \quad 2x=10 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{10}{2}=5$$

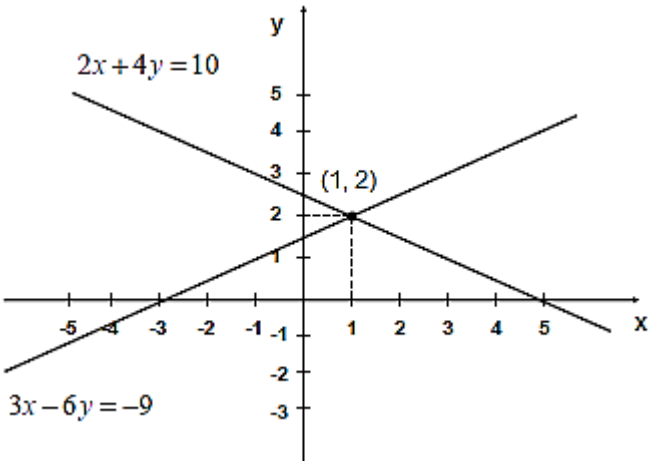
la recta pasa por los puntos (0, 2.5) y (5,0)

Para la segunda ecuación:

$$\text{Si } x=0 \quad \Rightarrow \quad -6y=-9 \quad \Rightarrow \quad y=\frac{-9}{-6}=1.5$$

$$\text{Si } y=0 \quad \Rightarrow \quad 3x=-9 \quad \Rightarrow \quad x=\frac{-9}{3}=-3$$

la recta pasa por los puntos (0,1.5) y (-3, 0)



Graficando, se obtiene la solución del sistema que es el punto de intersección (x, y) = (1, 2)

comprobación: $\left.\begin{array}{l} 2(1)+4(2)=2+8=10 \\ 3(1)-6(2)=3-12=-9 \end{array}\right\}$

2.-

$$\left.\begin{array}{l} 6x+14y=9 \\ 3x+2y=-3 \end{array}\right\}$$

Solución:

Para la primera ecuación:

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow 14y=9 \Rightarrow y=\frac{9}{14}\approx 0.6428$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow 6x=9 \Rightarrow x=\frac{9}{6}=\frac{3}{2}=1.5$$

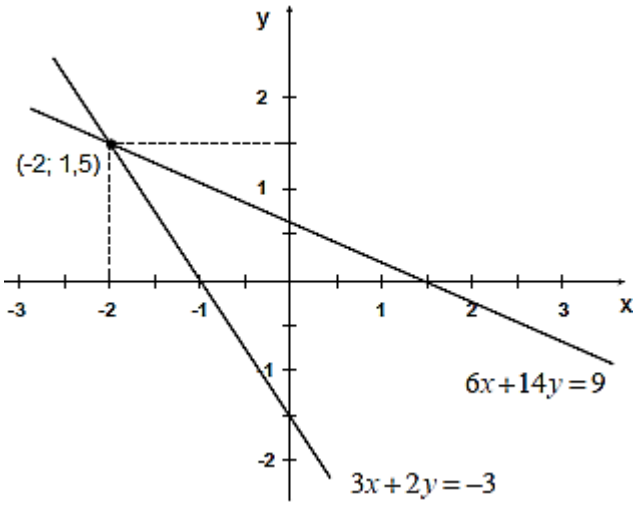
la recta pasa por los puntos (0; 0,6428) y (1,5;0)

Para la segunda ecuación:

$$\text{Si } x=0 \Rightarrow 2y=-3 \Rightarrow y=\frac{-3}{2}=-1.5$$

$$\text{Si } y=0 \Rightarrow 3x=-3 \Rightarrow x=\frac{-3}{3}=-1$$

la recta pasa por los puntos (0; -1,5) y (-1; 0)



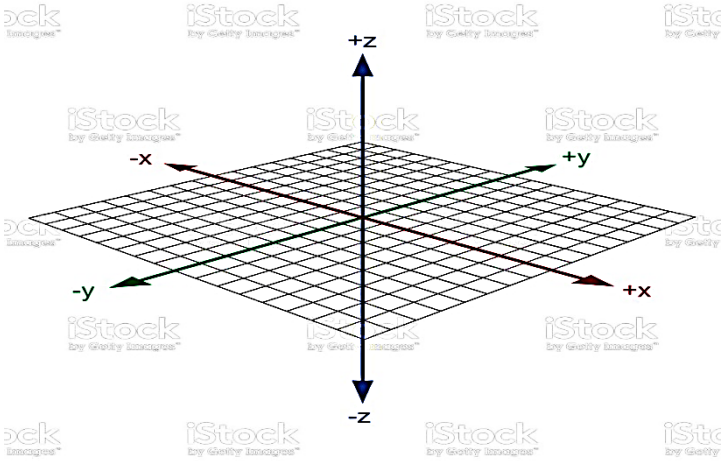
Graficando, se obtiene la solución que es el punto de intersección (x, y) = (- 2;1,5)

comprobación: $\left.\begin{array}{l} 6(-2)+14(1.5)=-12+21=9 \\ 3(-2)+2(1.5)=-6+3=-3 \end{array}\right\}$

Gráficas de planos en el sistema cartesiano XYZ

Veamos primero como es un sistema cartesiano XYZ (Figura 6) :

Figura 6 Sistema cartesiano en el espacio o XYZ



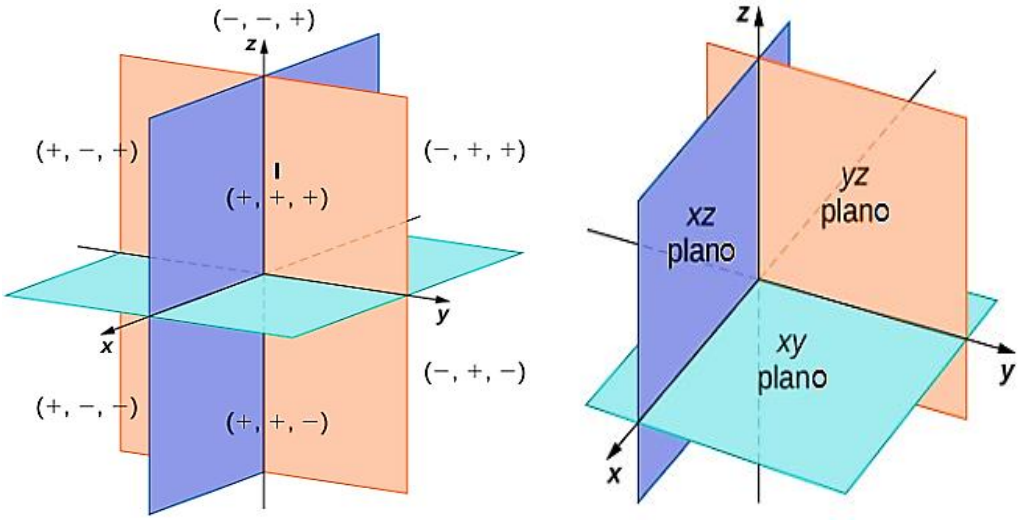
Fuente:https://www.istockphoto.com/es/vector/vector-de-eje-de-coordenadas-3d-gm818268912-132376771

Por fines pedagógicos, nos han dicho o nos han hecho ver las cosas como si estuvieramos desarrollándonos en un plano (R^2), pero la realidad es que nuestro entorno es tridimensional (R^3).

La perpendicularidad de las dimensiones en las dos direcciones, es decir que a partir del 0 o punto O (0; 0; 0) hacia la derecha lo asumimos como sentido positivo, a la izquierda,

sentido negativo, hacia arriba positivo, hacia abajo negativo, etc.; genera con la intersección de dimensiones positivas o negativas, planos y estos a su vez octantes (Figura 7):

Figura 7 Octantes en el sistema cartesiano tridimensional.

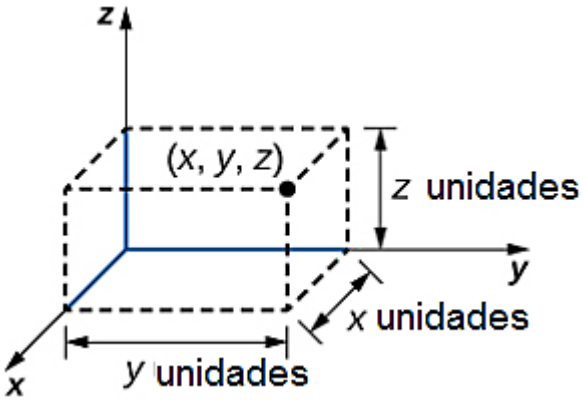


Fuente: (Cálculo 21, 2019)

El punto en el sistema cartesiano tridimensional

Según (Cálculo 21, 2019), un punto (x, y, z) en el espacio (R^3) se identifica por las tres coordenadas y se lo puede trazar haciendo lo siguiente (Figura 8): Ir x unidades a lo largo del eje X a partir del punto O (0, 0, 0), luego y unidades en la dirección del eje Y, luego, z unidades en la dirección del eje Z.

Figura 8 Gráfica del punto en el espacio



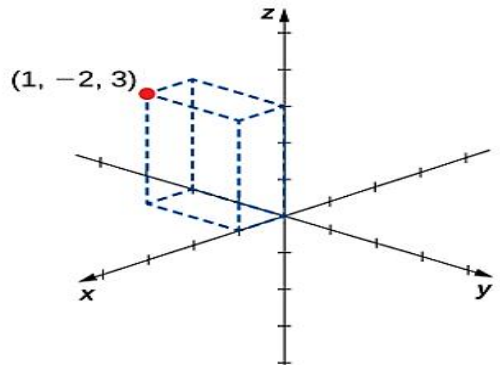
Fuente: (Cálculo 21, 2019)

Ejemplo:

Ubicar el punto (1, −2, 3) en el espacio tridimensional.

Solución:

Para ubicar este punto en R^3, comenzar dibujando tres lados de un prisma rectangular a lo largo de los ejes de coordenadas: una unidad en la dirección *x* positiva, 2 unidades en la dirección *y* negativa y 3 unidades en la dirección *z* positiva. Completar el prisma para trazar el punto.



Teniendo en cuenta estas indicaciones, ya podemos graficar una ecuación de la forma:

ax + by + cz = d, con a, b, c, d ∈ R; x, y, z variables de la ecuación.

Para graficar ecuaciones las ax + by + cz = d, de manera similar como se hizo para determinar por lo menos los dos puntos necesarios por donde trazar la gráfica de la ecuación ax + by = c, se lo debe hacer para encontrar por lo menos tres puntos para trazar la gráfica de las ecuaciones en el espacio.

Nota: Las ecuaciones ax + by + cz = d, dibujadas en el espacio, mediante la ubicación de los tres puntos requeridos, lo que se obtiene son planos o superficies planas.

El procedimiento a seguir, es (Engler, Müller, Vrancken, & Hecklein, 2019):

- Se marcan los tres puntos de intersección.

intersección con el eje x es el punto $\left(-\frac{d}{a}, 0, 0\right)$

intersección con el eje y es el punto $\left(0, -\frac{d}{b}, 0\right)$

intersección con el eje z es el punto $\left(0, 0, -\frac{d}{c}\right)$

- Se unen los tres puntos de intersección para formar un triángulo y luego se trazan rectas paralelas entre sí, de tal manera que se forme un plano o superficie rectangular.

Ejemplo:

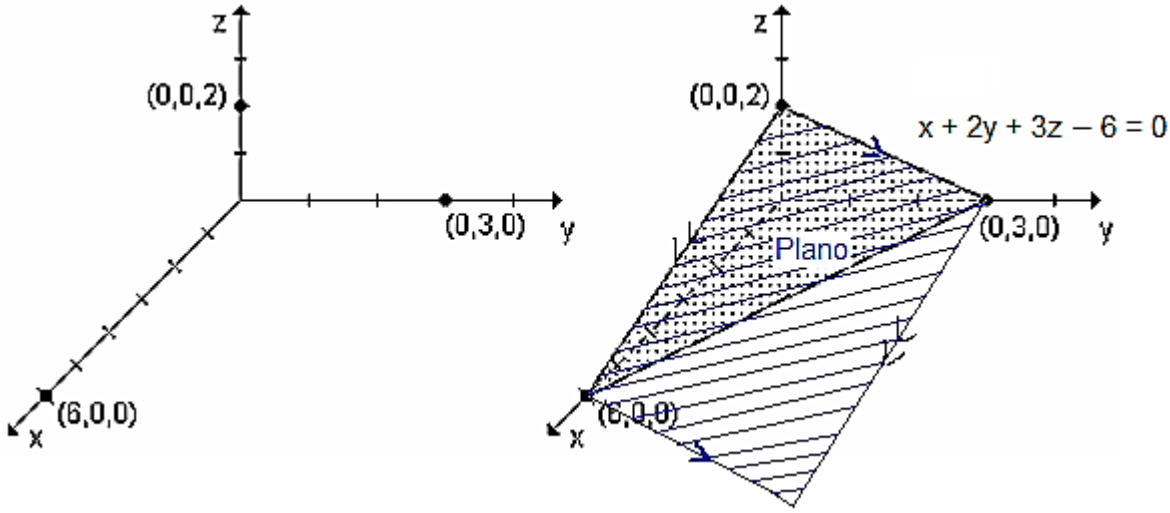
1.- Grafique el plano de ecuación: $x + 2y + 3z - 6 = 0$.

Para obtener la gráfica del plano buscamos las intersecciones del mismo con cada uno de los ejes coordenados. Para ello anulamos en la ecuación en forma simultánea dos de las variables y obtenemos el valor de la tercera.

$$x + 2y + 3z - 6 = 0$$

Supongamos que hacemos 0, para cada eje:

X	Y	Z	Cortes con los ejes:
0	0	2	(0, 0, 2)
0	3	0	(0, 3, 0)
6	0	0	(6, 0, 0)



Obs (AulaFacil, 2023)**:**

Una ecuación lineal con 3 variables, representa un plano en el espacio. En consecuencia, un sistema ecuaciones lineales 3x3, representa 3 planos en el espacio.

La posición de estos 3 planos se pueden comparar 2 a 2; en el espacio dos planos pueden situarse de 3 formas diferentes:

a) **Planos coincidentes**: Los coeficientes de todas las variables, y los términos independientes guardan la misma proporción.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{11} / a_{21} = a_{12} / a_{22} = a_{13} / a_{23} = b_1 / b_2$$

Ejemplo:

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 2$

$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 4$

$2 / 4 = 3 / 6 = 5 / 10 = 2 / 4$

b) **Planos paralelos**: Los coeficientes de todas las variables, guardan la misma proporción, pero NO los términos independientes.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{11} / a_{21} = a_{12} / a_{22} = a_{13} / a_{23} \neq b_1 / b_2$$

Ejemplo:

$2x_1 + 3x_2 + 5x_3 = 5$

$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 7$

$2 / 4 = 3 / 6 = 5 / 10 \neq 5 / 7$

c) **Planos secantes**: Los coeficientes de todas las variables, NO guardan la misma proporción.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{11} / a_{21} \neq a_{12} / a_{22} \neq a_{13} / a_{23} \neq b_1 / b_2$$

Ejemplo:

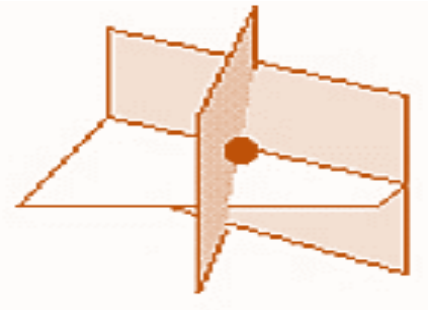
$2x_1 + 8x_2 + 3x_3 = 5$

$4x_1 + 6x_2 + 10x_3 = 7$

$2 / 4 \neq 8 / 6 \neq 3 / 10 \neq 5 / 7$

Como podemos determinar la posición de los planos 2 a 2, podemos determinar en qué posición se encuentran los 3, a la vez:

- Si el sistema es compatible determinado (Solución única): Los tres planos se cortan en un punto, que es la solución del sistema.

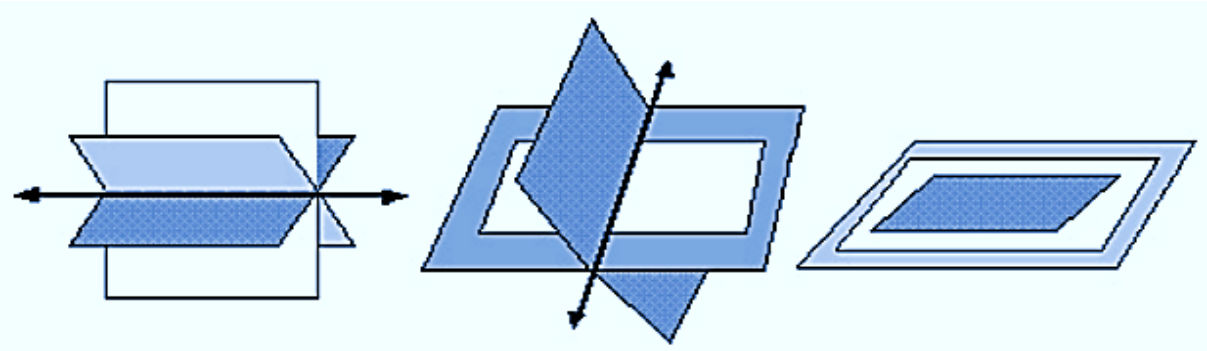


- Si el sistema es compatible indeterminado (Infinitas soluciones), puede ocurrir que:

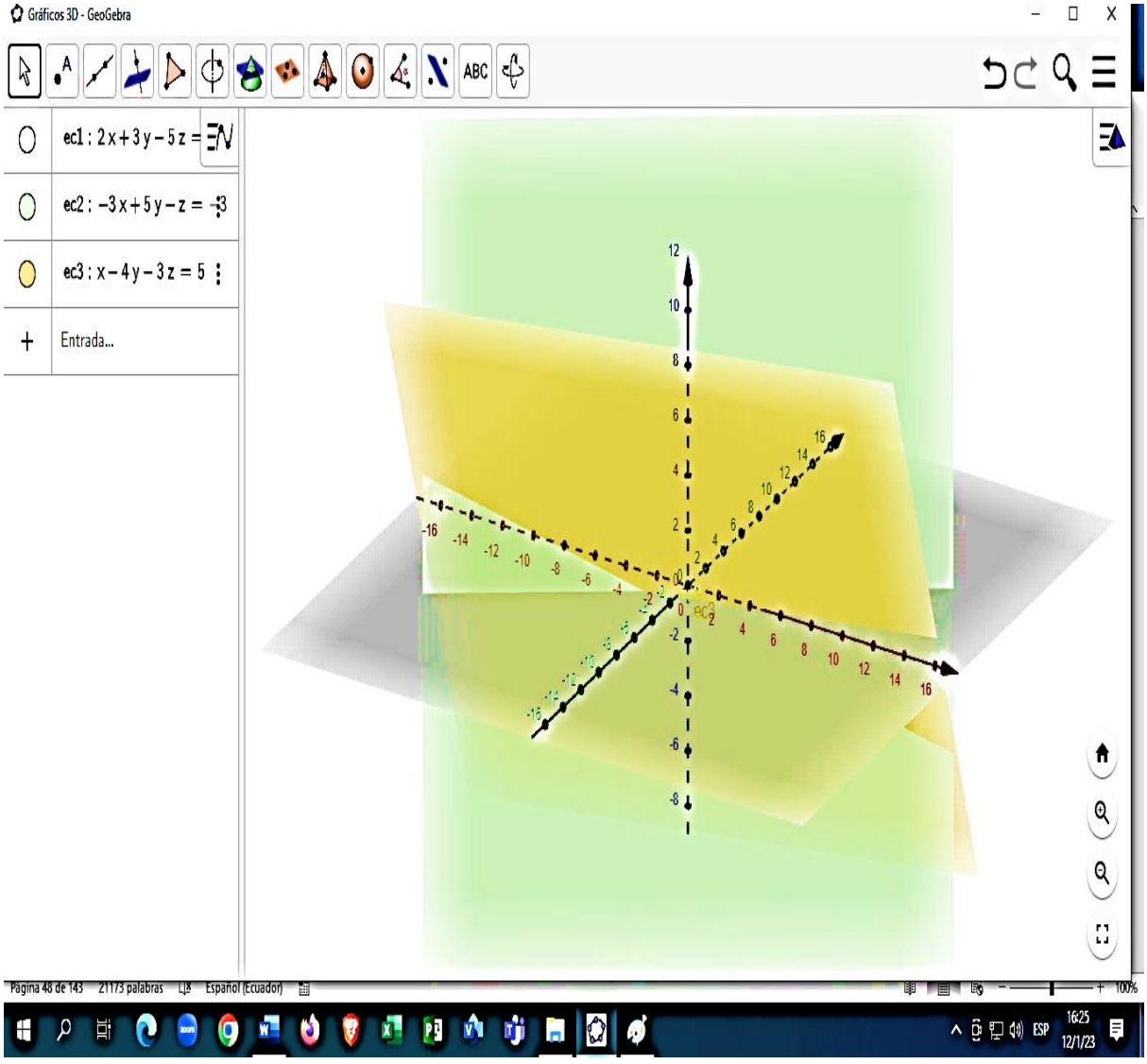
a) Los tres planos se corten en una recta.

b) Dos planos son coincidentes y el otro los corta en una recta.

c) Los tres planos son coincidentes.



Ejemplo de resolución gráfica en Geogebra:



CAPÍTULO DOS

MATRICES

Introducción

Según (Uzuriaga_López & Martínez_Acosta, 2015), el primero en usar el término matriz, fue Sylvester en 1850, quien definió a la matriz como un arreglo rectangular de términos y notó cómo algunas matrices contenían dentro de ellas, varios determinantes representados como arreglos cuadrados.

¿Para qué sirven las matrices?; según (Muñoz_Chipatecua, 2021) su aplicabilidad es muy extensa, en este constructo matemático se definen operaciones y ciertas propiedades, que permiten la solución de sistemas de ecuaciones de primer grado con varias incógnitas o variables; el ingreso de datos organizados en filas y columnas en los lenguajes de programación; el estudio de las conexiones entre distintos núcleos urbanos (urbanismo); sociología; el análisis de producción, economía; probabilidades y estadística; problemas de optimización de recursos (programación lineal), entre otros.

Las matrices, se consideran como herramientas útiles en diversos campos de las ciencias naturales, aplicadas y sociales; entonces es un lenguaje matemático facilitador y manejable a la hora de plantear y solucionar problemas aplicables a las ramas mencionadas.

Definición de matriz:

Según (Arce_S., Castillo_E., & González, 2003); sean m y n enteros positivos. Un arreglo rectangular en m filas y n columnas de números reales:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

se llama matriz de orden o tamaño: m × n sobre R.

De forma abreviada

$$A = (a_{i,j})_{1\le j\le n}^{1\le i\le m} \qquad o \qquad A = (a_{i,j})_{mxn}$$

donde los elementos $a_{i,j} \in R$ son los números, que reciben el nombre de entrada (i,j) de la matriz, que representa la posición de la entrada: fila i, columna j.

Otra notación útil para las demostraciones:

$$A(i,j) = a_{i,j}$$

$$A(:,j) = vector\ columna\ j\ de\ A$$

$$A(i,:) = vector\ fila\ \ i\ de\ A$$

La **dimensión** de la matriz es $m\ x\ n$, que quiere decir que tiene m filas y n columnas, con lo que los subíndices son $1 \le i \le m,\ \ 1 \le j \le n$.

Si $m = n$, diremos que es una matriz cuadrada, si no, que es rectangular.

Ejemplos:

1.-

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

A es una matriz de 2 x 3. En este caso, a_{12} = -2, a_{21} = 9.

2.-

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

A es una matriz cuadrada, tiene 2 filas y 2 columnas, diremos que su tamaño es 2x2

3.-

$$C = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 0 \\ -1 & \frac{1}{5} & \sqrt{2} \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

C es una matriz que tiene 4 filas y 3 columnas, diremos que su tamaño es 4x3

Tipos de matrices

Según (Costa, Rossignoli, Sorichetti, & Vampa, 2018), se tienen varios tipos de matrices:

- V**ector o matriz columna b** de m componentes es una matriz de dimensión m x 1:

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

- V**ector o matriz fila a** de n componentes es una matriz de dimensión 1 x n:

$$\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

- **Matriz nula**: Una matriz de tamaño m × n cuyas componentes son todas iguales a 0 se denomina matriz nula o matriz cero. Se denota por O.

Ejemplos:

$$a)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 4} \qquad b)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{2\times 3} \qquad c)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{3\times 3}$$

- **Matriz involutiva**: Es aquella en la que la multiplicación de una matriz por sí misma da como resultado la matriz identidad I.

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{-1}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{-1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{-1}{2} \cdot \frac{-1}{2} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz idempotente**: La multiplicación de una matriz por sí misma da como resultado la misma matriz A: $A^2 = A$

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} 2$$

$$\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

- **Matriz nilpotente:** Cuando el índice de nilpotencia k, si k es el menor entero positivo tal que: $A^k = O$.
- **Matriz Ortogonal**: Matriz que multiplicada por su traspuesta da como resultado la matriz identidad: $A*A^T = I$

Sea:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cos(a) & \sin(a) \\ -\sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(a) & -\sin(a) \\ \sin(a) & \cos(a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos(a)\cos(a) + \sin(a)\sin(a) & \cos(a)(-\sin(a)) + \sin(a)\cos(a) \\ (-\sin(a))\cos(a) + \cos(a)\sin(a) & (-\sin(a))(-\sin(a)) + \cos(a)\cos(a) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos^2(a) + \sin^2(a) & 0 \\ 0 & \sin^2(a) + \cos^2(a) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- **Matriz normal**: Una matriz es normal si conmuta con su traspuesta; es decir, si: $A*A^T=A^T*A$. Obviamente, si A es simétrica, antisimétrica u ortogonal, es necesariamente normal.

- **Matriz traspuesta o la transpuesta A^T** de una matriz A de m x n es una matriz de n x m cuyas filas son las columnas de A, es decir, cuyo elemento i; j es el elemento j; i de A: $(A^T)_{ij} = a_{ji}$

Ejemplos:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \quad , \quad \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ -2 & 0 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 9 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Al intercambiar o trasponer las filas por columnas en una matriz A se obtiene lo que se conoce como matriz traspuesta o transpuesta A^T:

Propiedades de la matriz traspuesta:

Por definición: $(A^T)^T = A$ (2.3)

Si A y B son de tamaño m x n y $\alpha \in R$, se tiene las siguientes propiedades:

- ✓ $(A + B)^T = A^T + B^T$
- ✓ $(\alpha A)^T = \alpha A^T$
- ✓ $(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$
- ✓ $A = A^T \iff A \text{ simétrica}$
- ✓ El determinante de una matriz regular, coincide con el de su traspuesta

$$\det(A) = \det(A^T)$$

- **Matrices cuadradas especiales**

Si: m = n, se dice que es una matriz cuadrada.

Los siguientes tipos de matrices cuadradas son de particular importancia:

- **Matriz diagonal**: Es aquella en la que todos los elementos que están fuera de la diagonal principal son cero:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 0$ si $i \neq j$.

Se suelen expresar como

$$A = diag(v, mxn)$$

Donde v es el vector de la diagonal y $m\ x\ n$ la dimensión de la matriz.

Ejemplos:

$$a)\ \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad b)\ \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad c)\ \boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ejemplos:

$$diag\big((1{,}5{,}9), 3x3\big) = diag(\ (1,5,9)\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & -9 \end{pmatrix}, \qquad diag(\ (1{,}4)\ ,\ \ 2x3\ ) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$$

Propiedades:

1) Las matrices diagonales, son un caso particular de las triangulares.

2) La traspuesta de una matriz diagonal de dimensión $m\ x\ n$, es la matriz diagonal de dimensión $n\ x\ m$ con la misma diagonal.

3) En las matrices cuadradas, el determinante es el producto de los elementos de la diagonal

$$\det(A) = \det\big(\ diag(a_1, a_2, \dots, a_n)\big) = \prod_{k=1}^{n} a_k = a_1 \cdot a_2 \cdots a_n$$

con lo que son regulares si, y sólo si, todos los elementos de la diagonal son distintos de 0.

En tal caso, $A = diag(a_1, \dots, a_n) \quad \rightarrow \quad A^{-1} = diag(a_1^{-1}, \dots, a_n^{-1})$

4) Potencias: Para matrices cuadradas

$$A = diag(a_1, a_2, \dots, a_n) \quad \rightarrow \quad A^k = diag\big(a_1^k, a_2^k, \dots, a_n^k\big) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

5) Producto de diagonales: dimensiones de A y B son mxn y nxt

$$A = diag\big((a_1, \dots, a_r), mxn\big) \qquad B = diag\big((b_1, \dots, b_s), nxt\big) \qquad \rightarrow \qquad AB$$

$$= diag\left((a_1 b_1, \dots, a_q b_q), mxt\right)$$

$$r = \min\{m, n\} \qquad s = \min\{n, t\} \qquad q = \min\{r, s\}$$

6) Los autovalores o valores propios de las matrices diagonales cuadradas, son los elementos de la diagonal.

Un caso particular de la matriz diagonal es la matriz escalar:

- **Matriz escalar**: Toda matriz diagonal en la que todos los elementos de la diagonal principal son iguales.

$$A=\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a \end{pmatrix}$$

Ejemplo:

$$H=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

- **Matriz identidad**: Es una matriz diagonal, donde todos los elementos de la diagonal principal son 1. Se la denota con I o también 1

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \vdots & 0 & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$I_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. La matriz identidad de $n \times n$ se denota como I_n o $\mathbb{1}_n$.

Ejemplos:

$a)\quad \boldsymbol{I}_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad b)\quad \boldsymbol{I}_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad c)\quad \boldsymbol{I}_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Propiedad de la matriz identidad:

Para cualquier matriz A de tamaño n × n, se cumple que: AI = A = IA

- **Matriz triangular superior**: Es una matriz donde todos los coeficientes por debajo de la diagonal principal son cero:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$a_{ij} = 0$ si $i > j$

Ejemplos:

$a)\ \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix} \qquad b)\ \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix} \qquad c)\ \boldsymbol{U} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

- **Matriz triangular inferior**: Es una matriz donde todos los coeficientes por encima de la diagonal principal son cero:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ $a_{ij} = 0$ si $i < j$

Si A es triangular superior, A^T es triangular inferior y viceversa.

Propiedades de las matrices triangulares:

1) La traspuesta de una triangular superior, es triangular inferior y viceversa.

2) Si la matriz es cuadrada, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal:

$$A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \le i,j \le n} \ \rightarrow \ \det(A) = \prod_{k=1}^{n} a_{k,k}$$

Por tanto, es regular si, y sólo si, los elementos de la diagonal son distintos de 0.

En tal caso,

$$A = \left(a_{i,j}\right)_{1 \le i,j \le n} \ \rightarrow \ \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} = \frac{1}{\prod_{k=1}^{n} a_{k,k}} = \prod_{k=1}^{n} \frac{1}{a_{k,k}}$$

3) La inversa de una matriz triangular superior (inferior), es una matriz superior (inferior).

4) El producto de matrices triangulares superiores (inferiores), es una matriz triangular superior (inferior).

5) Los autovalores o valores propios de una matriz triangular cuadrada, son los elementos de su diagonal.

Ejemplos:

$a)\ \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \qquad b)\ \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad c)\ \boldsymbol{L} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

- **Matriz simétrica**: Es una matriz que es igual a su matriz traspuesta:

A simétrica, $A^T = A$

$a_{ij} = a_{ji}, \forall\ i; j.$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 3 \\ -7 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

- **Matriz anti-simétrica**: Es una matriz que es igual a menos su matriz traspuesta:

  A antisimétrica, $A^T = -A$

$a_{ij} = -a_{ji}, \forall\ i; j.$ Esto implica que los elementos diagonales (i = j) son nulos, ya que $A_{ii} = -A_{ii}$

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -7 & 3 \\ 7 & 0 & 1 \\ -3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

- **Matriz escalonada:** Es una matriz que tiene forma escalonada reducida si se cumple con los siguientes requisitos:

  a) si hay alguna fila nula, está al final.

  b) el primer elemento no nulo de la primera fila, de izquierda a derecha, sólo tiene elementos nulos debajo a no ser que la matriz sea una única fila, en cuyo caso se cumple. A este elemento se le llama **elemento principal de la fila**.

  c) si se cumplen las condiciones anteriores, la matriz que resulta al eliminar la primera fila y columna, cumple las condiciones anteriores. Si todos los elementos principales de las filas en caso de haberlo, son 1, diremos que es una matriz en forma **escalonada reducida**.

Ejemplos:

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ no es escalonada, por debajo del elemento principal de la primera fila no hay 0.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ no es escalonada, por debajo del elemento principal de la segunda fila no hay 0.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ es escalonada, pero no reducida.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ no es escalonada, por debajo del elemento principal de la segunda fila no hay 0.

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ no es escalonda por no tener las filas nulas al final

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es escalonada

$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{pmatrix}$ no es escalonada, no hay 0 por debajo del elemento principal de la primera fila

$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ no es escalonada, por debajo del elemento principal de la primera fila no hay sólo 0.

$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es escalonada, pero no reducida, por encima del elemento principal de la segunda fila no hay 0.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es escalonada reducida

$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es escalonada reducida

$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ es escalonada, pero no reducida, no todos los elementos principales son 1

- **Matriz ortogonal:** Una matriz cuadrada A = a_{ij} es ortogonal si su inversa coincide con su traspuesta, es decir, si se verifica que $A \cdot A^T = A^T \cdot A = I$, con lo que $A^{-1} = A^T$.

Operaciones matriciales

Segun (Muñoz_Chipatecua, 2021):

Matrices iguales

Sean dos matrices: A = (a_{ij}) con tamaño m×n y B = (b_{ij}) con tamaño p×q, son iguales; si y solo si m = p, n = q y $a_{ij} = b_{ij}$, ∀i, j.

Ejemplo:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 3 & -3 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 1-2 & 3-1 \\ 2 & 1+2 & 1-4 \end{pmatrix} \text{ son iguales.}$$

Suma de matrices

Sean: Las matrices A=(a_{ij}) y B=(b_{ij}) de dimensión m × n, tal que la suma de ambas es la matriz resultante C con dimensión m × n, es decir:

$$A+B=(a_{ij})+(b_{ij})=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}=$$

$$\begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \cdots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{nm}+b\_mn \end{pmatrix}=C$$

Propiedades:

Para sumar matrices debe cumplir:

1.- Las matrices deben tener igual dimensión.

2.- Se suman los elementos correspondientes a su posición.

Nota: La definición de suma de matrices es aplicable para su operación inversa, es decir, para la resta de matrices, tal que: A - B= (a_{ij}) - (b_{ij}) = C

Ejemplos:

Sean:

$$A=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \text{ y } B=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

a) A+B

$$A+B=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0+1 & -4+2 & 1+3 \\ 1+4 & 3+1 & 2+3 \\ 2+(-1) & 1+2 & 4+0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 5 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

b) A-B

$$A-B=\begin{pmatrix} 0 & -4 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} 0-1 & -4-2 & 1-3 \\ 1-4 & 3-1 & 2-3 \\ 2-(-1) & 1-2 & 4-0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} -1 & -6 & -2 \\ -3 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

Nota: La operación de suma y resta entre matrices no es conmutativa, por tanto, $A - B \neq B - A$. Además, se nota que $A - B = -(B - A)$

Multiplicación por un escalar

Se define la multiplicación por un escalar $\alpha \in \mathbb{R}$ por una matriz $B=(b_{ij})$ de dimensión $m \times n$, a la operación: $\alpha B=\alpha(b_{ij})$

$$= a \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mm} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} ab_{11} & ab_{12} & \cdots & ab_{1n} \\ ab_{21} & ab_{22} & \cdots & ab_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ab_{m1} & ab_{m2} & \cdots & ab_{mm} \end{pmatrix}$$

Propiedades de las matrices:

Sean las matrices A, B, C de dimensiones m×n; α, β ∈ R:

a) A + O = A

b) 0A = O, siendo O la matriz nula

c) A + B = B + A

d) (A + B) + C = A + (B + C)

e) α(A + B) = αA + α B

f) 1A=A

g) (α + β)A = αA + βA

Producto de matrices

Dos matrices: A y B se pueden multiplicar si el número de columnas de A, coincide con el número de filas de B: $A_{m*n}\ B_{n*p} = C_{m*p}$

Nota: El elemento c_{ij} de la matriz producto, se obtiene multiplicando cada elemento de la fila i de la matriz A, por cada elemento de la columna j de la matriz B y luego se los suma.

Ejemplo:

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

Hallar A*B =

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 3 & 3 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} (1\cdot 1)+(2\cdot 3) & (1\cdot 0)+(2\cdot 3) & (1\cdot -1)+(2\cdot 4) & (1\cdot 2)+(2\cdot -2) \\ (-1\cdot 1)+(0\cdot 3) & (-1\cdot 0)+(0\cdot 3) & (-1\cdot -1)+(0\cdot 4) & (-1\cdot 2)+(0\cdot -2) \\ (1\cdot 1)+(2\cdot 3) & (1\cdot 0)+(2\cdot 3) & (1\cdot -1)+(2\cdot 4) & (1\cdot 2)+(2\cdot -2) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 6 & 7 & -2 \\ -1 & 0 & 1 & -2 \\ 7 & 6 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

Propiedades de la multiplicación de matrices:

Sean las matrices: A, B, C tales que la multiplicación entre ellas, esté bien definida; es decir, el número de filas y de columnas permita efectuar la operación:

1. Propiedad clausurativa: A*B también es una matriz.
2. Existencia del elemento neutro: si A es una matriz de tamaño m × m, entonces la matriz identidad I_{m*m} es el elemento neutro, tal que: I*A = A*I = A.
3. Propiedad asociativa: (A*B)*C = A*(B*C)
4. Propiedad distributiva: (A+B)C = AC + BC y C(A+B) = CA + CB.

Propiedades de las operaciones básicas

Sean A, B, C matrices; λ, $\beta \in \mathbb{R}$.

Suma	Multiplicación por un escalar
$A+B$ es una matriz	λA es una matriz
$A+B=B+A$	$\lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
$(A+B)+C=A+(B+C)$	$(\lambda+\beta)A=\lambda A+\beta A$
$A+O=A$	$\lambda(\beta A)=(\lambda\beta)A$
$A+(-A)=O$	$1A=A$

Propiedades del producto y de la transpuesta

Sean A, B, y C matrices de modo que las operaciones que se indican, se pueden realizar y $\lambda \in \mathbb{R}$.

PRODUCTO	TRANSPUESTA
$(AB)C = A(BC)$	$(A^T)^T = A$
$A(B+C) = AB + AC$	$(AB)^T = B^T A^T$
$(A+B)C = AC + BC$	$(A+B)^T = A^T + B^T$
$IA = A$ y $AI = A$	$(\lambda A)^T = \lambda A^T$

Matriz inversa

Según (Uzuriaga_López & Martínez_Acosta, 2015):

Definición de Inversa de una matriz cuadrada: Sea A una matriz cuadrada de orden n.

Se dice que A es invertible o no singular, si existe una matriz B tal que: AB = BA = I.

Si cumple la condición, se dice que B es inversa de A; caso contrario, se dice que A es no invertible o singular.

Propiedad: Si A es una matriz invertible, entonces su inversa es única.

Nota: Si A es invertible, su inversa se denota por A^{-1}. Además: $AA^{-1} = I = A^{-1}A$.

Advertencia. $A^{-1} \neq \frac{1}{A}$

Procedimiento para hallar A^{-1}:

Paso 1: Formar la matriz ampliada (A | I).

Paso 2: Aplicar operaciones elementales para obtener la forma escalonada reducida por renglones E de A: (A | I) → (E | B).

Paso 3: Decidir si A es invertible. Si E = I, A es invertible y A^{-1} = B.

Lo contrario: A es no invertible o singular.

Ejemplos:

1.- Hallar la matriz inversa de D, aplicando el método indicado, que se llama método de reducción de renglones o de Gauss Jordan:

1) Dada la matriz a invertir, por ejemplo, una de 3x3, reescribirla con la matriz aumentada con la de identidad.

2) Lograr un pivote 1 en la posición $a_{1,1}$.

3) Realizar operaciones en el renglón, con el objetivo de hacer ceros (0), todos los elementos bajo el pivote $a_{1,1}$.

4) Lograr un pivote 1 en la posición $a_{2,2}$

5) Realizar operaciones en el renglón, con el objetivo de hacer ceros todos los elementos sobre y bajo el pivote $a_{2,2}$.

6) Lograr un pivote 1 en la posición $a_{3,3}$.

7) Realizar operaciones en el renglón, con el objetivo de hacer ceros todos los elementos sobre el pivote $a_{3,3}$.

8) Es decir, inicialmente tenemos [M|I], luego de realizar las operaciones indicadas anteriormente obtendremos: $[I|M^{-1}]$.

$$D=\begin{pmatrix}3 & 3\\ 6 & 3\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc}3 & 3 & 1 & 0\\ 6 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1:\frac{1}{3}F_1:}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1/3 & 0\\ 6 & 3 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2:F_2-6F_1}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1/3 & 0\\ 0 & -3 & -2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2:\frac{1}{3}F_2:}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 1/3 & 0\\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1:F_1-F_2}\left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & -1/3 & 1/3\\ 0 & 1 & 2/3 & -1/3\end{array}\right)$$

Finalmente, la matriz inversa es:

$$D^1=\begin{pmatrix}-1/3 & 1/3\\ 2/3 & -1/3\end{pmatrix}$$

2. Hallar la matriz inversa de E, aplicando el método indicado, que se llama método de reducción de renglones o de Gauss Jordan:

$$E=\begin{pmatrix}2 & 1 & 4\\ 1 & -1 & 2\\ 2 & 6 & 5\end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0\\ 2 & 6 & 5 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1:\frac{1}{2}F_1:}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}&0&0\\1&-1&2&0&1&0\\2&6&5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2:F_2-F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}&0&0\\0&-\frac{3}{2}&0&-\frac{1}{2}&1&0\\2&6&5&0&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3:F_3-2F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1/2&2&\frac{1}{2}&0&0\\0&-3/2&0&-\frac{1}{2}&1&0\\0&5&1&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_2:-\frac{2}{3}F_2:}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0\\0&5&1&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3:F_3-5F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&2&\frac{1}{2}&0&0\\0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0\\0&0&1&-\frac{8}{3}&\frac{10}{3}&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1:F_1-2F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&\frac{1}{2}&0&\frac{35}{6}&-\frac{20}{3}&-2\\0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0\\0&0&1&-\frac{8}{3}&\frac{10}{3}&1\end{array}\right)\xrightarrow{F_1:F_1-\frac{1}{2}F_2:}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&\frac{17}{3}&-\frac{19}{3}&-2\\0&1&0&\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0\\0&0&1&-\frac{8}{3}&\frac{10}{3}&1\end{array}\right)$$

Finalmente, la matriz inversa es:

$$E^{-1}=\left(\begin{array}{ccc}\frac{17}{3}&-\frac{19}{3}&-2\\\frac{1}{3}&-\frac{2}{3}&0\\-\frac{8}{3}&\frac{10}{3}&1\end{array}\right)$$

Propiedades de las matrices inversas:

Sea A una matriz de n x n no-singular o invertible, entonces:

1. A^{-1} es no singular y $(A^{-1})^{-1} = A$.

2. Si $\alpha \neq 0$, (αA) es no-singular y $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha} A^{-1}$.

3. Si B es también de $n \times n$ y no singular, entonces AB es no singular y

$$(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$$

4. El resultado anterior se puede extender a varias matrices de $n \times n$ no-singulares $A_1, A_2, \ldots, A_k$: El producto $A_1 A_2 \ldots A_k$ es no singular y su inversa es

$$(A_1 A_2 \ldots A_k)^{-1} = A_k^{-1} \ldots A_2^{-1} A_1^{-1}$$

5. Si A es no singular $\Rightarrow$ A^T es no singular y su inversa es la traspuesta de A^{-1}:

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

5. $|A| = |A^T|$

Ejemplo:

1.- Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_{11} - b_{12} & b_{11} \\ 2b_{21} - b_{22} & b_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

se obtiene un sistema para los b_{ij} cuya única solución es: $b_{11} = 0$, $b_{12} = -1$, $b_{21} = 1$, $b_{22} = 2$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Por lo tanto, esta matriz A es no singular o invertible y su inversa es:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Observaciones:

1.- Las matrices cuadradas (n x n) se dividen en dos clases:

- no-singulares o invertibles
- singulares o no invertibles

Las matrices no cuadradas (m x n, con m ≠ n), no pueden ser clasificadas o categorizadas como en el caso m = n.

2.- Si A de n x n, es no singular o invertible, el sistema de n x n: $Ax = b$

es compatible determinado ∀ b ∈ R^n, siendo la única solución: $x = A^{-1}b$

La conclusión, implica que si el sistema de nxn; Ax = b es incompatible o compatible indeterminado con infinitas soluciones; A es singular, pues de lo contrario sería compatible determinado.

Lo reciproco también es válido: si el sistema cuadrado es compatible determinado para algún b ∈ R^n, entonces A es no singular y por lo tanto es compatible determinado ∀ b.

Ejemplo:

Sea el sistema:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

es compatible determinado ya que:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

es invertible.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

o sea, $x_1 = -3$, $x_2 = 7$.

Cálculo de la inversa de una matriz n× n por la adjunta

Según (Eguia_Ribero, Unzueta_Inchaurbe, & Alberdi_Celaya, 2015), la inversa de una matriz se puede calcular mediante la siguiente fórmula:

$$A^{-1} = \frac{Adj(A^t)}{|A|} = \frac{(A^d)^t}{|A|}$$

Ejemplo:

1.- Sea A una matriz de dimensión 2× 2 de la forma:

$$A_{2\times 2} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

la matriz inversa de A es:

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Donde:

$$A^{d} = Adj(A) = \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Y el determinante de A:

$$|A| = a_{11}\, a_{22} - a_{12}\, a_{21}$$

2.- Sean las matrices:

a) $A=\begin{pmatrix}3 & 2\\ 1 & 4\end{pmatrix}$ b) $B=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{pmatrix}$ c) $C=\begin{pmatrix}2 & 6\\ 1 & 3\end{pmatrix}$

a) Se verifica, en primera instancia, el determinante de A, |A| = 10 ≠ 0, de tal manera que

$$A^{-1}=\frac{1}{(3\times 4-2\times 1)}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=-\frac{1}{10}\begin{pmatrix}4 & -2\\ -1 & 3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2/5 & -1/5\\ -1/10 & 3/10\end{pmatrix}$$

b) Para la matriz B se tiene que su determinante es |B| = 5 ≠ 0; por tanto:

$$B^{-1}=\frac{1}{(1\times 3-(-1)\times 2)}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\frac{1}{5}\begin{pmatrix}3 & 1\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3/5 & 1/5\\ -2/5 & 1/5\end{pmatrix}$$

c) Para la matriz C se tiene que su determinante es |C| = 0; lo que implica que la matriz no tiene inversa.

Rango de una matriz

Como cada matriz es equivalente a una única matriz en la forma escalonada reducida, se puede definir el rango como:

Definición de Rango de una matriz A:

Sea A una matriz n×m, se llama rango de A y se denota con Rng (A), al número de filas no nulas de la matriz en la forma escalonada reducida equivalente a A.

Así, para determinar el rango de una matriz A es necesario calcular su forma escalonada reducida, sin embargo, observe que cualquier matriz escalonada equivalente a A, tiene el mismo número de filas no nulas que la escalonada reducida. Esto porque la escalonada reducida se obtiene de la escalonada aplicando más operaciones, las cuales no modifican el número de filas no nulas.

Ejemplo:

Sea el siguiente sistema 4×3, en las variables: x_1, x_2 y x_3, determine el rango de B:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_3 = 2\\ -2x_1 + x_2 + 5x_3 = -1\\ -x_1 + x_2 + 3x_3 = 1\\ x_2 + x_3 = 3\end{cases}$$

en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Considerando la matriz aumentada del sistema, que le denominamos como B y aplicando operaciones elementales, llegamos a obtener una matriz escalonada C:

$$B = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[f_1 + f_3]{2f_1 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

Matriz aumentada

$$\xrightarrow[-f_2 + f_4]{-f_2 + f_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = C$$

Y como C es escalonada reducida; es suficiente con que sea escalonada y tiene dos filas no nulas, entonces: Rng(B) = 2

CAPÍTULO TRES

DETERMINANTES

Introducción

Los determinantes constituyen potentes herramientas que se utilizan comúnmente para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Los determinantes tienen múltiples usos en la vida cotidiana. Ellos se usan en una infinidad de tareas diarias. Un ejemplo es la industria de alimentos que permite relacionar diferentes porciones y la cantidad de nutrientes por porción según las diferentes porciones.

Además, la interpretación geométrica de los determinantes nos permite calcular, de forma sencilla, áreas y volúmenes de determinadas figuras geométricas, realizar productos vectoriales, y hallar las ecuaciones de un plano en el espacio.

Los campos de aplicación de la teoría de los determinantes y, en general, de la teoría de matrices son muy amplios, y abarcan desde las más clásicas aplicaciones en las áreas de física, economía, e ingeniería hasta aplicaciones más recientes como la generación de gráficos por ordenador, la teoría de la información, y la criptografía.

Según (Becerra_Espinosa, s.f.):

Definición de determinante

Se define como determinante de A; a una matriz cuadrada A de orden n. Se lo denota como: $|A|$, $\det(A)$ o ΔA, a la suma de los n productos signados, formados por n-factores que se obtienen al multiplicar n-elementos de la matriz, en que cada producto contenga un sólo elemento de cada fila y columna de A.

Esto significa que un determinante es un valor numérico $k \in R$, que sigue ciertas reglas para su cálculo.

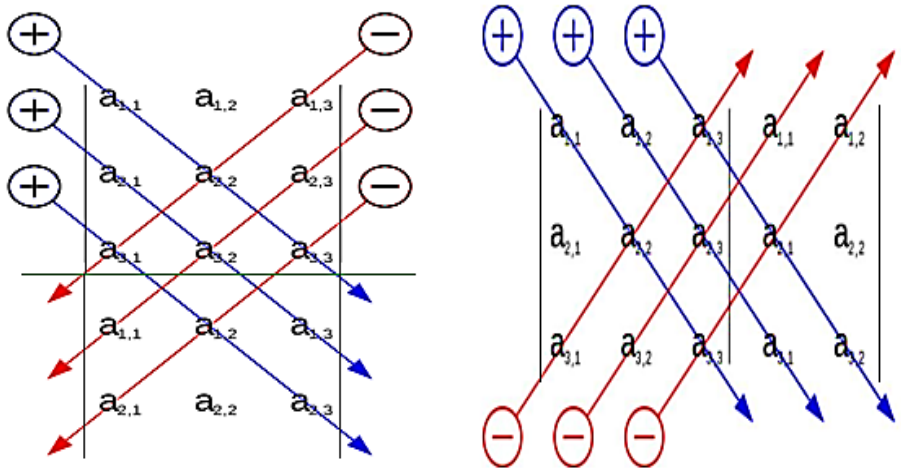
$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \dots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \mathrm{k}$$

Nota: Dos matrices diferentes (tanto en orden como en elementos) pueden tener igual determinante.

Cálculo de determinantes de segundo y tercer orden por el método de la Regla de Sarrus

Regla de Sarrus: Su determinante se puede calcular de la siguiente manera. Repetir o escribir las (n-1) primeras filas o columnas de la matriz hacia abajo o hacia la derecha de la misma. Después sumar los productos de las diagonales descendentes y quitar los productos de las diagonales ascendentes.

Por ejemplo, para una matriz 3x3:

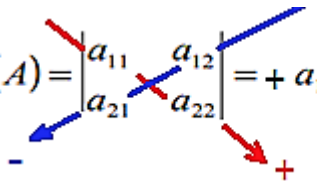


$$\det(A) = +a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

El determinante de la matriz de segundo orden, es:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = +a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$



Entonces el determinante de segundo orden, es el producto de los elementos de la diagonal Principal, al que se le antepone un signo (+); y al producto de los elementos de la diagonal secundaria, se le antepone un signo (-).

Ejemplos:

1) $\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 3(4) - 2(5) = 12 - 10 = 2$

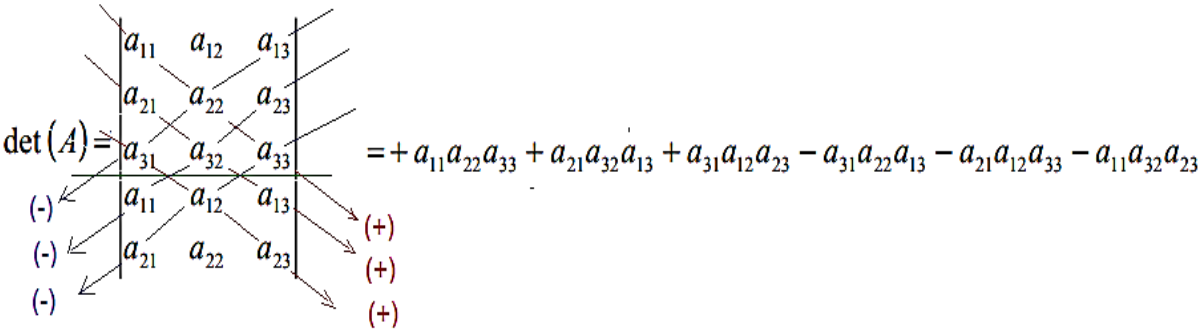
2) $\begin{vmatrix} 4 & -8 \\ 3 & -7 \end{vmatrix} = 4(-7) - 3(-8) = -28 + 24 = -4$

3) $\begin{vmatrix} -12 & -6 \\ 5 & -4 \end{vmatrix} = -12(-4) - 5(-6) = 48 + 30 = 78$

El determinante de la matriz de tercer orden, es:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$



$$= + a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{31}a_{12}a_{23} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{21}a_{12}a_{33} - a_{11}a_{32}a_{23}$$

Ejemplos:

1) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 5 \\ 7 & 4 & -1 \\ -2 & 0 & 6 \end{vmatrix} = 1(4)(6) + 7(0)(5) + (-2)(-3)(-1) - (-2)(4)(5) - (7)(-3)(6) - 1(0)(-1)$
$= 24 + 0 - 6 + 40 + 126 + 0 = 184$

2) $\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 3 & 5 & 10 \\ 1 & 7 & -8 \end{vmatrix} = 2(5)(-8)+3(7)(0)+1(-1)(10)-1(5)(0)-3(-1)(-8)-2(7)(10)$
$= -80+0-10-0-24-140 = -254$

3) $\begin{vmatrix} 3 & -5 & 8 \\ -4 & 2 & 3 \\ 7 & 9 & -1 \end{vmatrix} = 3(2)(-1)+(-4)(9)(8)+7(-5)(3)-7(2)(8)-(-4)(-5)(-1)-3(9)(3)$
$= -6-288-105-112+20-81 = -572$

Propiedades de los determinantes

1.	Si todos los elementos de una columna o de un renglón son cero, entonces el determinante es cero.

Ejemplo:

1) $\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} = 2(0)-6(0) = 0-0 = 0$

2) $\begin{vmatrix} -9 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = (-9)(0)-0(1) = 0-0 = 0$

2.	El determinante de la matriz A es igual al determinante de la matriz A^T.

Ejemplo:

$A = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det(A) = \begin{vmatrix} 5 & -1 \\ 8 & 3 \end{vmatrix} = 5(3)-(8)(-1) = 15+8 = 23$

$A^T = \begin{bmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \qquad \det(A^T) = \begin{vmatrix} 5 & 8 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 5(3)-(-1)(8) = 15+8 = 23$

3.	Si cada elemento de un renglón o una columna es multiplicado por un escalar k, el determinante es también multiplicado por k.

Ejemplo:

$\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 2(5)-4(3) = 10-12 = -2$

Multiplicando el primer renglón por k = 3

$$\begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 6(5) - (4)(9) = 30 - 36 = -6$$

Multiplicando la primera columna por k = 3

$$\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 12 & 5 \end{vmatrix} = 6(5) - 12(3) = 30 - 36 = -6$$

en general:

$$k\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ ka_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ ka_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} ka_{11} & ka_{12} & \cdots & ka_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

4. Si se intercambian dos renglones o columnas, el signo del determinante cambia.

Ejemplo:

1.-

$$\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 4(2) - 1(5) = 8 - 5 = 3$$

intercambiando renglones:

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 1(5) - 4(2) = 5 - 8 = -3$$

intercambiando columnas:

$$\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 5(1) - 2(4) = 5 - 8 = -3$$

2.- Hallar el det(A) y el det(B):

Sean:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

Solución:

Se tiene:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} = -4 + 3 = -1, \ \det B = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} = -3 + 4 = 1 = -\det A$$

Notar, que la matriz B se obtuvo de A, intercambiando los renglones 1 y 2.

5.	Si un renglón o columna, se traslada p renglones o columnas, entonces el determinante obtenido es igual a: $(-)^p\Delta$

Ejemplo:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 4(0)(-2)+1(-1)(3)+0(2)(-1)-(0)(0)(3)-1(2)(-2)-4(-1)(-1)$$
$$= 0-3+0-0+4-4=-3$$

si se mueve la primera columna, dos posiciones, entonces:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = 2(-1)(0)+(0)(-2)(4)+(-1)(3)(1)-(-1)(-1)(4)-(0)(3)(0)-2(-2)(1)$$
$$= 0-0-3-4-0+4=-3=(-1)^2\Delta$$

si se mueve el primer renglón, una posición, se tiene:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 4 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \end{vmatrix} = 1(2)(-2)+4(-1)(-1)+0(0)(3)-(0)(2)(-1)-4(0)(-2)-1(-1)(3)$$
$$= -4+4+0+0+0+3=3=(-1)^1\Delta$$

6.	Si los elementos de dos renglones o dos columnas son iguales, entonces el determinante es cero.

Ejemplos:

1) $$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 6 & 6 \end{vmatrix} = 1(6)-6(1)=6-6=0$$

2) $$\begin{vmatrix} -2 & 5 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} = (-2)(5)-(-2)(5)=-10+10=0$$

7.	Un determinante no cambia de valor si a todos los elementos de un renglón o columna, le son sumados o restados los elementos de otro renglón o columna, multiplicados por un escalar:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11}+ka_{1j} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21}+ka_{2j} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+ka_{nj} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}+ka_{i1} & a_{n2}+ka_{i2} & \ldots & a_{nn}+ka_{in} \end{vmatrix}$$

Ejemplo:

a)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2(4)-1(3) = 8-3 = 5$$

sumando a la primera columna la segunda multiplicada por 2:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2+2(3) & 3 \\ 1+2(4) & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 8 & 3 \\ 9 & 4 \end{vmatrix} = 8(4)-9(3) = 32-27 = 5$$

al segundo renglón de Δ se le resta tres veces el primer renglón:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1-(3)(2) & 4-(3)(3) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -5 & -5 \end{vmatrix} = 2(-5)-(-5)(3) = -10+15 = 5$$

Nota: Esta propiedad es muy empleada para obtener ceros y así simplificar el cálculo del determinante.

b)

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 4 & 5 & 2 \\ 6 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3-2(1) & -1 & 1 \\ 4-2(2) & 5 & 2 \\ 6-2(3) & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 15$$

8.-

Sea $A = (a_{ij})$ es una matriz triangular (diagonal) de tamaño $n \times n$. Entonces $\det A = a_{11}a_{22}\ldots a_{nn}$. En particular, $\det I = 1$.

9.-

Sean A y B matrices $n \times n$. Entonces $\det AB = \det A \det B$

Ejemplo:

Hallar el det(A), det(B) y det(AB).

Sean:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \text{ y } \boldsymbol{B} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 3 & -3 \end{pmatrix}$$

Se tiene:

$$\det \boldsymbol{A} = -2,\ \det \boldsymbol{B} = 3, \boldsymbol{AB} = \begin{pmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \text{ y}$$

$$\det(\boldsymbol{AB}) = -6 = (-2) \cdot 3 = \det \boldsymbol{A} \cdot \det \boldsymbol{B}$$

Resumen de propiedades:

Sean A y B matrices de orden n, entonces:

- det(A) = det(A^T), donde A^T es la matriz traspuesta de A.
- det(AB) = det(A) det(B).
- det(A^K) = det(A)^k:
- det(kA) = k^ndet(A).

Determinante Menor de un elemento

Sea un determinante de orden n, correspondiente a una matriz A:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Se define el menor de un elemento a_{ij}, al determinante que resulta de eliminar el renglón i y la columna j y se le nomina como M_{ij}:

$$M_{ij} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{j1} & a_{j2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Ejemplos.

1.- Dado el determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 10 & 6 & -2 \end{vmatrix}$$

Algunos determinantes menores, son:

$$M_{22} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 10 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & -3 \\ 10 & -2 \end{vmatrix} = 2 + 30 = 32$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 10 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & -3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 20 + 3 = 23$$

$$M_{23} = \begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 10 & 6 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 10 & 6 \end{vmatrix} = -6 - 50 = -56$$

3.- Encontrar el menor M_{43}, del determinante:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 2 & 10 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \end{vmatrix}$$

$$M_{43} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 3 & 2 \\ 9 & 0 & 2 & 10 \\ 8 & 7 & 5 & 4 \\ 2 & -3 & 1 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 2 \\ 9 & 0 & 10 \\ 8 & 7 & 4 \end{vmatrix} = 0 + 126 + 80 - 0 - 36 - 350 = -180$$

Cofactor de un elemento

Se define el cofactor de un elemento a_{ij} y se lo nota como A_{ij}:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

el cofactor es igual al determinante menor, multiplicado por 1 ó −1,

$$(-1)^{i+j} = \begin{cases} 1 \text{ si } i+j \text{ es par} \\ -1 \text{ si } i+j \text{ es impar} \end{cases}$$

Ejemplo.

1.- Calcular los cofactores del siguiente determinante:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}4 & 11\\ -5 & -8\end{vmatrix}$$

$A_{11} = -8$ $A_{12} = 5$ $A_{21} = -11$ $A_{22} = 4$

2.- Calcular los cofactores de los elementos correspondientes al primer renglón del siguiente determinante:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1 & 0 & 1\\ -2 & 5 & 4\\ 3 & 10 & 2\end{vmatrix}$$

Solución:

$$A_{11}=\begin{vmatrix}5 & 4\\ 10 & 2\end{vmatrix}=10-40=-30 \quad A_{12}=-\begin{vmatrix}-2 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}=-(-4-12)=16 \quad A_{13}=\begin{vmatrix}-2 & 5\\ 3 & 10\end{vmatrix}=-20-15=-35$$

Definición: El det(A) de cualquier orden:

$$A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn}\end{pmatrix}$$

puede obtenerse mediante la suma de los productos, de los elementos de cualquier renglón o columna, por sus respectivos cofactores:

$$\det(A)=\sum_{j=1}^{n}a_{kj}A_{kj}=\sum_{i=1}^{n}a_{il}A_{il}$$

Para el renglón k o la columna l.

Ejemplo:

1. Con k = 1:

$$\det A=|A|=a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+\cdots+a_{1n}A_{1n}=\sum_{j=1}^{n}a_{1j}A_{1j}$$

A esta expresión particular, se le conoce como la expansión por cofactores de A, a lo largo de la primera fila.

2.- Para un determinante de tercer orden:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}A_{11}+a_{12}A_{12}+a_{13}A_{13} = a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

Implica que se elige el primer renglón y se suman los elementos por sus respectivos cofactores.

Este procedimiento también puede aplicarse a columnas, por ejemplo, para el caso anterior:

$$\det(A)=a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

se elige la tercera columna y se suman los elementos por sus respectivos cofactores.

Ejemplos:

1.- Calcular el siguiente determinante aplicando cofactores:

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -8 \\ 6 & -4 & 5 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

Tomando el primer renglón se tiene:

$$=1\begin{vmatrix} -4 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-8)\begin{vmatrix} 6 & -4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 1(-12+5)-2(18-10)+(-8)(-6+8)$$
$$=1(-7)-2(8)+(-8)(2)=-7-16-16=-39$$

Luego, tomando la segunda columna se tiene:

$$=-2\begin{vmatrix} 6 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} + (-4)\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & -8 \\ 6 & 5 \end{vmatrix} = -2(18-10)+(-4)(3+16)-(-1)(5+48)$$
$$=-2(8)-4(19)+1(53)=-16-76+53=-39$$

Cuando hay varios ceros en un renglón o en una columna, para simplificar el cálculo de un determinante, es conveniente utilizar ese renglón o columna.

$$\det(A)=\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & 4 & -1 & 3 \end{vmatrix} = 1A_{11}+0A_{21}+0A_{31}+0A_{41}=A_{11}$$

calculando el cofactor A_{11} y tomando el segundo renglón se tiene:

$$= 2\begin{vmatrix} 2 & 5 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - 1\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} + (-2)\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = 2(6+5) - 1(9-20) + (-2)(-3-8)$$
$$= 2(11) - 1(-11) + (-2)(-11) = 22 + 11 + 22 = 55$$

2.- Calcule los menores M_{11}, M_{12} y M_{13} y sus respectivos cofactores A_{11}, A_{12} y A_{13} de la matriz.

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & -7 \\ 3 & -3 & 8 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$M_{11} = \begin{pmatrix} 3 & -7 \\ -3 & 8 \end{pmatrix},\ A_{11} = (-1)^2 \begin{vmatrix} 3 & -7 \\ -3 & 8 \end{vmatrix} = 3$$

$$M_{12} = \begin{pmatrix} -3 & -7 \\ 2 & 8 \end{pmatrix},\ A_{12} = (-1)^3 \begin{vmatrix} -2 & -7 \\ 3 & 8 \end{vmatrix} = -5$$

$$M_{13} = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix},\ A_{13} = (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -3 \end{vmatrix} = -3$$

Propiedades de los cofactores y menores en el determinante de una matriz:

Según (Uzuriaga_López & Martínez_Acosta, 2015):

1.-

Sea $\boldsymbol{A} = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$. Entonces

1. $a_{i1}A_{k1} + a_{i2}A_{k2} + \cdots + a_{in}A_{kn} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{kj} = 0$ si $i \neq k$
2. $a_{1j}A_{1r} + a_{2j}A_{2r} + \cdots + a_{nj}A_{nr} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{jr} = 0$ si $j \neq r$

Ejemplo:

Sea:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 4 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Calcule:

$a)$ $\det \boldsymbol{A}$
$b)$ $a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23}$
$c)$ $a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33}$
$d)$ $a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31}$
$e)$ $a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32}$
$f)$ $a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33}$

Solución:

$$a)\ \det \boldsymbol{A} = a_{11}A_{11} + a_{12}A_{12} + a_{13}A_{13} = (2)(12) + (-2)(10) + (3)(1) = 24 - 20 + 3 = 7.$$
$$b)\ a_{21}A_{21} + a_{22}A_{22} + a_{23}A_{23} = (3)(-11) + (-4)(-8) + (4)(2) = 7 = \det \boldsymbol{A}$$
$$c)\ a_{31}A_{31} + a_{32}A_{32} + a_{33}A_{33} = (4)(4) + (-5)(1) + (2)(-2) = 7 = \det \boldsymbol{A}$$

$$d)\ a_{11}A_{11} + a_{21}A_{21} + a_{31}A_{31} = (2)(12) + (3)(-11) + (4)(4) = 7 = \det \boldsymbol{A}$$
$$e)\ a_{12}A_{12} + a_{22}A_{22} + a_{32}A_{32} = (-2)(10) + (-4)(-8) + (-5)(1) = 7 = \det \boldsymbol{A}$$
$$f)\ a_{13}A_{13} + a_{23}A_{23} + a_{33}A_{33} = (3)(1) + (4)(2) + (2)(-2) = 7 = \det \boldsymbol{A}$$

2.-

Sea $\boldsymbol{A}$ una matriz $n \times n$. Entonces

1. $$\det \boldsymbol{A} = \underbrace{a_{i1}A_{i1} + a_{i2}A_{i2} + \cdots + a_{in}A_{in}}_{\text{Expansión por la fila } i} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij},\ i = 1, 2, \ldots, n$$

2. $$\det \boldsymbol{A} = \underbrace{a_{1j}A_{1j} + a_{2j}A_{2j} + \cdots + a_{nj}A_{nj}}_{\text{Expansión por la columna } j} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}A_{ij},\ j = 1, 2, \ldots, n$$

Ejemplos:

1.- Hallar el det(A):

Sea:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -4 & 0 \\ 2 & 0 & -3 & 0 \\ 5 & 3 & -3 & 7 \\ 4 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución:

Expandiendo por la segunda columna se tiene

$$\det \boldsymbol{A} = \cancel{a_{12}^{0}}A_{12} + \cancel{a_{22}^{0}}A_{22} + a_{32}A_{32} + \cancel{a_{42}^{0}}A_{42} = 3(-1)^{5}\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & -4 & 0 \\ 2 & -3 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix}}_{\text{Expansión por col 3}}$$

$$= -3 \cdot 1 \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = -3(-9 + 8) = 3.$$

2.- Calcule |A| en cada caso, donde

$$a)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 9 & 10 & 8 \end{pmatrix}, \qquad b)\ \boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & 13 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{pmatrix}$$

Solución.

a) Desarrollando por la primera fila se tiene:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 7 & 5 & 0 \\ 9 & 10 & 8 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + \cancel{a_{12}^{0}}A_{12} + \cancel{a_{13}^{0}}A_{13}$$

$$= 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 0 \\ 10 & 8 \end{vmatrix} = 1 \cdot (5 \cdot 8 - 0) = 1 \cdot 5 \cdot 8 = 40$$

b) Expandiendo por la primera columna se tiene:

$$|\boldsymbol{A}| = \begin{vmatrix} 2 & 13 & 4 \\ 0 & 6 & 3 \\ 0 & 0 & 9 \end{vmatrix} = a_{11}A_{11} + \cancel{a_{21}^{0}}A_{21} + \cancel{a_{31}^{0}}A_{31}$$

$$= 2 \cdot \begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} = 2 \cdot (6 \cdot 9 - 0) = 2 \cdot 6 \cdot 9 = 108$$

Definición de Matriz de cofactores:	Se le denotada por cof A, es la matriz formada por los cofactores de A.
Definición de Matriz adjunta:	Sea: A = (a_{ij}) de tamaño n × n. La adjunta de A, descrita simbólicamente como adjA, se la define como la transpuesta de la matriz de los cofactores de A: adjA = $(\text{cof } A)^T$

Ejemplo:

Sea:

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 4 \\ 4 & -5 & 2 \end{pmatrix}$$

Encuentre la adjA.

Solución:

Solución.

Los cofactores de A son:

$$A_{11} = + \begin{vmatrix} -4 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = 12, \qquad A_{12} = - \begin{vmatrix} 3 & 4 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 10, \qquad A_{13} = + \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{21} = - \begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -5 & 2 \end{vmatrix} = -11, \qquad A_{22} = + \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -8, \qquad A_{23} = - \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -4 & 4 \end{vmatrix} = 4, \qquad A_{32} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 1, \qquad A_{33} = +\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} = -2$$

Luego:

$$\operatorname{cof} A = \begin{pmatrix} 12 & 10 & 1 \\ -11 & -8 & 2 \\ 4 & 1 & -2 \end{pmatrix} \qquad \operatorname{adj} A = (\operatorname{cof} A)^T = \begin{pmatrix} 12 & -11 & 4 \\ 10 & -8 & 1 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Corolario:

Si $\det A \neq 0$, *entonces* A *es invertible y* $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \operatorname{adj} A$.

CAPÍTULO CUATRO

MÉTODOS MATRICIALES EN LA SOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Introducción

En esta sección estudiaremos modelos y métodos matriciales de solución de sistemas de n ecuaciones con n incógnitas. Estos métodos de solución de sistemas de ecuaciones lineales son muy versátiles y los puede aplicar en cualquier caso que se presente.

Recordar que cualquier sistema arbitrario de m ecuaciones lineales con n incógnitas puede presentar las siguientes posibilidades:

1. El sistema no tiene solución, se dice que es inconsistente.
2. El sistema tiene única solución, se dice que es consistente.
3. El sistema tiene infinitas soluciones, se dice que es dependiente.

Métodos matriciales

Según (Arce_S., Castillo_E., & González, 2003), (Costa, Rossignoli, Sorichetti, & Vampa, 2018):

Para describir este método de la matriz ampliada, partamos de la definición de un sistema de ecuaciones lineales:

Definición:

Un sistema de n ecuaciones lineales con m variables x_1; x_2; ….; x_m, es un sistema de n ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_m = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_m = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nm}x_m = b_n \end{cases}$$

donde los coeficientes a_{11}; a_{12}; ….; a_{nm} y b_1; ….; b_n son números reales. El sistema, también se lo puede escribir como:

1.-

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = 1,\ldots,n$$

2.-

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

Simplificando:

$$Ax = b,$$

donde $A = (a_{ij})$ es la matriz n × m de coeficientes del sistema,

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ v_n \end{pmatrix}$$

son el vector de constantes (b) en las ecuaciones a la derecha del igual y el vector de variables del sistema (x), respectivamente.

A esta forma de escritura: Ax = b se le conoce como escritura matricial del sistema.

Cada ecuación i del sistema, se representa como: El producto del vector fila i de la matriz A, multiplicado por el vector columna x igual a la componente i del vector b.

Ejemplo:

Sea el siguiente sistema 4×3, en las variables: x_1, x_2 y x_3:

$$\begin{cases} x_1 & & - & 2x_3 & = & 2 \\ -2x_1 & + & x_2 & + & 5x_3 & = & -1 \\ -x_1 & + & x_2 & + & 3x_3 & = & 1 \\ & & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{cases}$$

en forma matricial:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ -2 & 1 & 5 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Según el orden del sistema lineal, estos se clasifican en:

- **Sistema cuadrado**: Si m = n, es decir, si tiene el mismo número de ecuaciones que de variables.
- **Sistema rectangular**: Si m ≠ n, es decir, si el sistema tiene más ecuaciones que variables.

  Cuando:

  - m > n: Se denomina sobredeterminado.
  - m < n: Se denomina su determinado.

Definición:

- Un sistema con al menos una solución se denomina sistema compatible o consistente:
  - Si la solución es única, se lo denomina sistema compatible determinado.
  - Si existen infinitas soluciones se lo llama sistema compatible indeterminado.

- Un sistema sin solución se llama sistema incompatible o inconsistente.

$$\text{Sistema:} \begin{cases} \text{Compatible:} \begin{cases} \text{Determinado} \\ \text{Indeterminado} \end{cases} \\ \text{Incompatible} \end{cases}$$

- Al conjunto de todas las soluciones de un sistema se lo llama conjunto solución.

Método de eliminación de Gauss

El método consiste en la aplicación de operaciones elementales en las filas o columnas de las matrices. Antes de nada, conviene indicar que es una matriz.

Una matriz, es una tabla de doble entrada, compuesta por filas y columnas; en la que se disponen o colocan los objetos matemáticos.

Para lo cual, se colocan en el interior una especie de paréntesis ( ), los coeficientes del sistema lineal de ecuaciones, en el mismo orden, como se muestren en el sistema de ecuaciones lineales.

Definición:

La matriz de coeficientes A de un sistema m x n es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

y la matriz ampliada (A | b) del mismo sistema m x n es:

$$(A \mid b) = \left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

Realizar operaciones elementales sobre las ecuaciones lineales, es equivalente a realizar las siguientes operaciones sobre las filas de la matriz ampliada:

1.- Intercambiar dos filas.

2.- Multiplicar una o más filas por un número no nulo.

3.- Sumar a una fila j-ésima un múltiplo de otra fila i-ésima, y reemplazar la fila j por la resultante de la operación realizada.

Notaciones.

Cuando explicitamos las operaciones realizadas para reducir el sistema por este método, abreviamos fila i mediante f_i.

La operación que permuta la fila i con la fila j ($i \neq j$), se escribirá: $f_i \leftrightarrow f_j$.

La operación que multiplica la fila i por un número $\alpha \neq 0$, se escribirá: αf_i.

La operación que suma a la fila j el resultado de multiplicar por un número α a la fila i se escribirá como: $f_j + \alpha f_i$.

También, para ahorrar escritura, se listarán los pasos del último tipo juntos, cuando se use la misma fila f_i.

Pivoteo

¿Cómo realizar las operaciones elementales en forma sistemática?

Para cada fila no nula, se denomina pivote, al primer elemento no nulo de esa fila.

Apoyados en el pivote, mediante operaciones elementales, se llevan a cero (0), todos los términos de esa columna que están por debajo del pivote, de acuerdo al siguiente procedimiento:

1.- Tomar la primera fila y su primer coeficiente como pivote. Con operaciones adecuadas eliminar los primeros coeficientes de las filas siguientes, o sea, los elementos de la primera columna, salvo el pivote de la fila 1:

En el sistema aplicar el método de la matriz aumentada:

$X_{11} + 2x_{12} + x_{13} = 3$

$3x_{21} – x_{22} – x_{23} = -1$

$2x_{31} – 3x_{32} + x_{33} = 4$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 3 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} f_2-3f_1 \\ \longrightarrow \\ f_3-2f_1 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right)$$

2.- Luego, considerar la segunda fila y su segundo coeficiente como pivote:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & -1 & -1 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} f_3-1/7f_2 \\ \longrightarrow \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -7 & -6 & -10 \\ 0 & 0 & -1/7 & -4/7 \end{array}\right)$$

3.- Continuar así, con la tercera fila y el elemento de la tercera columna, hasta obtener una forma triangular, no necesariamente única.

Si durante este proceso, el coeficiente que correspondería ser pivote de una fila particular resulta ser cero, entonces se permuta esa fila con alguna de las que le siguen, para lograr una fila con un pivote no nulo. Si no existe una fila entre las que le siguen, que tenga un coeficiente no nulo en esa columna que se analiza, se abandona esa columna y se pasa a la columna siguiente en la misma fila.

4.- Finalmente, resolver por sustitución hacia atrás, como antes.

Ejemplos:

1.- Resolver el sistema por el método de eliminación gausiana (Vélez, s.f.):

$$\begin{cases} 2x_1+4x_2-6x_3+10x_4=2 \\ x_1+x_2-2x_3+7x_4=4 \\ 2x_1+7x_2-7x_3+7x_4=2 \\ 4x_1+9x_2-10x_3+14x_4=6 \end{cases}$$

Solución:

Primero se escribe la matriz aumentada del sistema, la cual va a ser transformada mediante operaciones elementales sobre sus filas en una matriz en forma escalonada.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -6 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 7 & 4 \\ 2 & 7 & -7 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & -10 & 14 & 6 \end{array}\right]$$

El primer elemento distinto de cero de la primera fila debe ser 1. Para conseguir ese 1, se multiplica la primera fila por 1/2, es decir, se hace la operación elemental $1/2F_1$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 2 & 4 & -6 & 10 & 2 \\ 1 & 1 & -2 & 7 & 4 \\ 2 & 7 & -7 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & -10 & 14 & 6 \end{array}\right] \frac{1}{2}F_1 \to F_1 \left[\begin{array}{cccc|c} \boxed{1} & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 7 & 4 \\ 2 & 7 & -7 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & -10 & 14 & 6 \end{array}\right]$$

Los elementos por debajo del 1, que se obtuvo como primer elemento de la primera fila, deben ser ceros. Estos ceros se van a obtener, usando la primera fila para hacer las siguientes operaciones elementales: $(-F_1 + F_2) \to F_2$, $(-2F_1 + F_3) \to F_3$ y $(-4F_1 + F_4) \to F_4$.

$$\begin{array}{rcccc|c} -F_1 \to & -1 & -2 & 3 & -5 & -1 \\ +F_2 \to & 1 & 1 & -2 & 7 & 4 \\ \hline & 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcccc|c} -2F_1 \to & -2 & -4 & 6 & -10 & -2 \\ +F_3 \to & 2 & 7 & -7 & 7 & 2 \\ \hline & 0 & 3 & -1 & -3 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcccc|c} -4F_1 \to & -4 & -8 & 12 & -20 & -4 \\ +F_4 \to & 4 & 9 & -10 & 14 & 6 \\ \hline & 0 & 1 & 2 & -6 & 2 \end{array}$$

entonces

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 7 & 4 \\ 2 & 7 & -7 & 7 & 2 \\ 4 & 9 & -10 & 14 & 6 \end{array}\right] \begin{array}{c} (-F_1 + F_2) \to F_2 \\ (-2F_1 + F_3) \to F_3 \\ (-4F_1 + F_4) \to F_4 \end{array} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 2 \end{array}\right]$$

En la última matriz obtenida, el primer elemento distinto de cero de la segunda fila debe ser 1, y se va a conseguir haciendo $-F_2 \to F_2$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 2 \end{array}\right] -F_2 \to F_2 \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & \boxed{1} & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 2 \end{array}\right]$$

Los elementos por debajo del 1 que se acaba de obtener, deben ser iguales a cero. Estos ceros se van a conseguir usando la segunda fila para hacer sobre la última matriz, las siguientes operaciones elementales: $(-3F_2 + F_3) \to F_3$ y $(-F_2 + F_4) \to F_4$.

$$\begin{array}{rcccc|c} -3F_2 \to & 0 & -3 & 3 & 6 & 9 \\ +F_3 \to & 0 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ \hline & 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \end{array} \quad ; \quad \begin{array}{rcccc|c} -F_2 \to & 0 & -1 & 1 & 2 & 3 \\ +F_4 \to & 0 & 1 & 2 & -6 & 2 \\ \hline & 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \end{array}$$

es decir,

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -6 & 2 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (-3F_2+F_3)\to F_3 \\ (-F_2+F_4)\to F_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right]$$

En la última matriz, el primer elemento distinto de cero de la tercera fila debe ser 1, y se va a conseguir haciendo $1/2F_3 \rightarrow F_3$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right] \quad \frac{1}{2}F_3 \to F_3 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right]$$

El elemento debajo del 1 que se acaba de conseguir, debe ser igual a cero. Este cero se va a obtener haciendo $(-3F_3 + F_4) \rightarrow F_4$.

$$\begin{array}{rcccc|c} -3F_3 \to & 0 & 0 & -3 & -\frac{9}{2} & -\frac{27}{2} \\ +F_4 \to & 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \\ \hline & 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{2} & -\frac{17}{2} \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 3 & -4 & 5 \end{array}\right] \quad (-3F_3+F_4)\to F_4 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{2} & -\frac{17}{2} \end{array}\right]$$

Por último, el primer elemento distinto de cero en la cuarta fila debe ser 1. Este 1 se consigue haciendo $-2/17F_4 \rightarrow F_4$.

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{17}{2} & -\frac{17}{2} \end{array}\right] \quad -\frac{2}{17}F_4 \to F_4 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} & \frac{9}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right]$$

2.- Resolver el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{cases} -x_1+2x_2- x_3=2 \\ -2x_1+2x_2+ x_3=4 \\ 3x_1+2x_2+2x_3=5 \\ -3x_1+8x_2+5x_3=17 \end{cases}$$

Solución:

La matriz aumentada del sistema es:

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 5 & 17 \end{array}\right]$$

El primer elemento distinto de cero de la primera fila debe ser 1 y todos los demás elementos de la primera columna deben ser ceros.

$$\left[\begin{array}{rrr|r} -1 & 2 & -1 & 2 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 5 & 17 \end{array}\right] \quad -F_1 \to F_1 \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 2 & 5 \\ -3 & 8 & 5 & 17 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (2F_1+F_2)\to F_2 \\ (-3F_1+F_3)\to F_3 \\ (3F_1+F_4)\to F_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 3 & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 11 \\ 0 & 2 & 8 & 11 \end{array}\right]$$

El primer elemento distinto de cero en la segunda fila debe ser 1 y todos los demás elementos de la segunda columna deben ser ceros.

$$-\frac{1}{2}F_2 \to F_2 \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 8 & -1 & 11 \\ 0 & 2 & 8 & 11 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (2F_2+F_1)\to F_1 \\ (-8F_2+F_3)\to F_3 \\ (-2F_2+F_4)\to F_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{array}\right]$$

El primer elemento distinto de cero en la tercera fila debe ser 1 y todos los demás elementos de la tercera columna deben ser ceros.

$$\frac{1}{11}F_3 \to F_3 \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -\frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 11 & 11 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (2F_3+F_1)\to F_1 \\ \left(\frac{3}{2}F_3+F_2\right)\to F_2 \\ (-11F_3+F_4)\to F_4 \end{array} \quad \left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

La última matriz está en forma escalonada reducida y de ella se obtiene que

$$x_1 = 0 \quad , \quad x_2 = \frac{3}{2} \quad y \quad x_3 = 1$$

El conjunto solución del sistema es: $\left\{\left(0, \frac{3}{2}, 1\right)\right\}$

Análisis de Soluciones para un Sistema de n Ecuaciones Lineales con m Variables

Para un sistema de ecuaciones lineales n×m, a resolver usando el proceso de eliminación de Gauss – Jordan:

Sea r el número de filas distintas de cero en la matriz escalonada reducida o escalonada de la matriz de los coeficientes.

Este número r es llamado el rango de la matriz, entonces:

1.- Si r = m, al hacer que la matriz ampliada del sistema llegue a su forma escalonada reducida, la matriz de los coeficientes se transforma en la matriz identidad.

El sistema tiene solución única y la forma de la matriz escalonada reducida es

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & d_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & d_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & d_n \end{array}\right]$$

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2x_1 + 5x_2 - 4x_3 = 5 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 12 \end{cases}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 2 & 5 & -4 & 5 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \\ 3 & 4 & 2 & 12 \end{array}\right] \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 5 & -4 & 5 \\ 3 & 4 & 2 & 12 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (-2F_1 + F_2) \to F_2 \\ (-3F_1 + F_3) \to F_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & 5 & 3 \end{array}\right]$$

$$\begin{matrix}(-2F_2+F_1)\to F_1\\(2F_2+F_3)\to F_3\end{matrix}\quad\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&3&5\\0&1&-2&-1\\0&0&1&1\end{array}\right]\quad\begin{matrix}(-3F_3+F_1)\to F_1\\(2F_3+F_2)\to F_2\end{matrix}\quad\left[\begin{array}{ccc|c}1&0&0&2\\0&1&0&1\\0&0&1&1\end{array}\right]$$

La matriz de los coeficientes, fue reducida a la matriz identidad, por lo tanto, el sistema tiene solución única. El sistema representado por la última matriz conduce a la solución del sistema.

$$x_1=2\qquad x_2=1\qquad x_3=1$$

2.- Si r < m, al hacer que la matriz ampliada del sistema llegue a su forma escalonada reducida, la matriz de los coeficientes no se logra transformar en la matriz identidad.

Se obtienen menos ecuaciones que variables y el sistema tiene infinitas soluciones.

La forma de la matriz escalonada reducida es:

$$\left[\begin{array}{ccccccccc|c}1&0&\cdots&0&0&c_{11}&c_{12}&\cdots&c_{1p}&d_1\\0&1&\cdots&0&0&c_{21}&c_{22}&\cdots&c_{2p}&d_2\\\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots&\vdots&\vdots&\cdots&\vdots&\vdots\\0&0&\cdots&0&1&c_{r1}&c_{r2}&\cdots&c_{rp}&d_r\end{array}\right]$$

Donde: $p = (m - r) \geq 1$.

Hay (m – r) variables libres, que pueden tomar cualquier valor real.

Ejemplo:

Resolver cada sistema:

$$\begin{cases}x_1+2x_2+3x_3=3\\2x_1+3x_2+8x_3=4\\5x_1+8x_2+19x_3=11\end{cases}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&3\\2&3&8&4\\5&8&19&11\end{array}\right]\quad\begin{matrix}(-2F_1+F_2)\to F_2\\(-5F_1+F_3)\to F_3\end{matrix}\quad\left[\begin{array}{ccc|c}1&2&3&3\\0&-1&2&-2\\0&-2&4&-4\end{array}\right]$$

$$-F_2 \to F_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & -2 & 4 & -4 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c} (-2F_2+F_1)\to F_1 \\ (2F_2+F_3)\to F_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & -1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Se acaba de obtener una fila de ceros y no es posible transformar la matriz de los coeficientes en la matriz identidad.

En este caso, r = 2 < 3 = m; m − r =1, por lo tanto, hay una variable libre.

El sistema representado por la última matriz es:

$$\begin{aligned} x_1 + 7x_3 &= -1 \\ x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

X_3 es una variable libre. Se hace $x_3 = t$, en donde t toma cualquier valor real. El conjunto solución del sistema es:

$$\left\{(x_1, x_2, x_3) \,\middle|\, x_1 = -1-7t,\ x_2 = 2+2t,\ x_3 = t,\ donde\ t\ es\ cualquier\ número\ real.\right\}$$

3.- Si la matriz escalonada reducida tiene una fila que represente una ecuación, en la cual los coeficientes de las variables son todos iguales a cero y el término constante es distinto de cero, entonces el sistema no tiene solución.

Es decir, el sistema es inconsistente.

La forma de la matriz escalonada reducida es:

$$\left[\begin{array}{ccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & * & \cdots & * & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & * & \cdots & * & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right]$$

Ejemplo:

Resolver el sistema:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 - 3x_2 + 8x_3 = 7 \\ 3x_1 - 4x_2 + 13x_3 = 8 \end{cases}$$

Solución:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 2 & -3 & 8 & 7 \\ 3 & -4 & 13 & 8 \end{array}\right] \begin{array}{l} (-2F_1+F_2)\to F_2 \\ (-3F_1+F_3)\to F_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 4 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} (2F_2+F_1)\to F_1 \\ (-2F_2+F_3)\to F_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 7 & 8 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{array}\right]$$

La última fila de la matriz escalonada reducida representa la ecuación:

$$0x_1+0x_2+0x_3=-4$$

es decir, 0 = −4, que es una contradicción; significando que el sistema es inconsistente y no tiene solución.

Ejemplos de aplicación práctica:

Ver (Vélez, s.f.):

1.- Una firma produce tres clases de artículos A, B, y C que requieren ser procesados por tres máquinas I, II y III. El tiempo requerido en horas para procesar una unidad de cada producto en las tres máquinas está dado por la siguiente tabla:

	A	B	C
I	3	1	2
II	1	2	1
III	2	4	1

La máquina I está disponible por 490 horas, la máquina II por 310 horas y la máquina III por 560 horas. ¿Cuántas unidades de cada artículo se deben producir, si se quiere usar todo el tiempo que las máquinas tienen disponible?

Solución:

Sean:

X_1 = número de unidades del artículo A que se deben producir.

X_2 = número de unidades del artículo B que se deben producir.

X_3 = número de unidades del artículo C que se deben producir.

El tiempo que se usará la máquina I está dado por la ecuación: $3x_1 + x_2 + 2x_3 = 490$

El tiempo que se usará la máquina II está dado por la ecuación: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 310$

El tiempo que se usará la máquina III está dado por la ecuación: $2x_1 + 4x_2 + x_3 = 560$

Se debe resolver el sistema:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 490 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = 310 \\ 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 560 \end{cases}$$

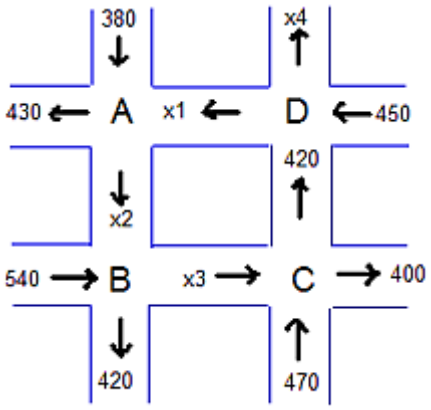
$$\left[\begin{array}{ccc|c} 3 & 1 & 2 & 490 \\ 1 & 2 & 1 & 310 \\ 2 & 4 & 1 & 560 \end{array}\right] \quad F_1 \leftrightarrow F_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 310 \\ 3 & 1 & 2 & 490 \\ 2 & 4 & 1 & 560 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} (-3F_1 + F_2) \to F_2 \\ (-2F_1 + F_3) \to F_3 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 310 \\ 0 & -5 & -1 & -440 \\ 0 & 0 & -1 & -60 \end{array}\right]$$

$$-\frac{1}{5}F_2 \to F_2 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 310 \\ 0 & 1 & 1/5 & 88 \\ 0 & 0 & -1 & -60 \end{array}\right] \quad (-2F_2 + F_1) \to F_1 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/5 & 134 \\ 0 & 1 & 1/5 & 88 \\ 0 & 0 & -1 & -60 \end{array}\right]$$

$$-F_3 \to F_3 \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3/5 & 134 \\ 0 & 1 & 1/5 & 88 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right] \quad \begin{array}{l} \left(-\frac{3}{5}F_3 + F_1\right) \to F_1 \\ \left(-\frac{1}{5}F_3 + F_2\right) \to F_2 \end{array} \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 98 \\ 0 & 1 & 0 & 76 \\ 0 & 0 & 1 & 60 \end{array}\right]$$

Se debe producir 98 unidades del artículo A, 76 unidades del artículo B y 60 unidades del artículo C, para usar en su totalidad el tiempo que las máquinas tienen disponible.

2.- A continuación, se da un diagrama que muestra el volumen de tráfico promedio por hora, de vehículos que entran y salen en cada una de 4 intersecciones de las calles más concurridas de una ciudad, entre las 7 am. y las 8 am. Determinar el número de vehículos que entran y salen en cada intersección en el período de tiempo establecido.



Solución

En cada intersección, el número de vehículos que entran es igual al número de vehículos que salen. Por lo tanto:

la intersección A conduce a la ecuación $380+x_1=430+x_2$,

la intersección B conduce a la ecuación $540+x_2=420+x_3$,

la intersección C conduce a la ecuación $470+x_3=820$,

la intersección D conduce a la ecuación $870=x_1+x_4$

Con lo que se tiene siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1-x_2 = 50 \\ x_2-x_3 = -120 \\ x_3 = 350 \\ x_1+x_4 = 870 \end{cases}$$

Resolviendo:

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 870 \end{array}\right] \quad (-F_1+F_4)\to F_4 \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 & 50 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 820 \end{array}\right]$$

$$\begin{array}{c}(F_2+F_1)\to F_1 \\ (-F_2+F_4)\to F_4\end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & -70 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -120 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 940 \end{array}\right] \quad \begin{array}{c}(F_3+F_1)\to F_1 \\ (F_3+F_2)\to F_2 \\ (-F_3+F_4)\to F_4\end{array} \quad \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 280 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 230 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 350 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 590 \end{array}\right]$$

En la intersección B, entran $540+x_2=770$ y salen $420+x_3=770$ vehículos.

En la intersección C, entran $470+x_3=820$ y salen 820 vehículos.

En la intersección D, entran 870 vehículos y salen $x_1+x_4=870$ vehículos.

Se obtiene la solución $x_1=280$, $x_2=230$, $x_3=350$, $x_4=590$.

Por lo tanto, entre las 7 am. y las 8 am., se tiene que:

En la intersección A, entran $380+x_1=660$ vehículos y salen $430+x_2=660$ vehículos.

Método de la Regla de Cramer

Es un método que se usa para resolver sistemas de n ecuaciones lineales con n variables, mediante el uso de determinantes.

Sea: Ax=b un sistema de n ecuaciones lineales con n variables.

Si det(A) ≠ 0 y si A, es la matriz que se obtiene al reemplazar la columna i de A por el vector columna b de los términos constantes, entonces, la solución única del sistema está dada por

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad \text{para} \quad i = 1, 2, \ldots, n$$

Nota: Si det(A) = 0, la Regla de Cramer no se puede aplicar.

Ejemplo:

1.- Usar la Regla de Cramer para resolver el sistema:

$$\begin{cases} 5x_1 + 2x_2 - x_3 = 3 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = -1 \\ 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 8 \end{cases}$$

Solución:

Se forman los siguientes determinantes:

i) det(A), que es llamado el determinante del sistema:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 5 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

ii) det(A_1), el cual se forma a partir del determinante de A , al sustituir la primera columna, la cual contiene los coeficientes de x_1 en las distintas ecuaciones del sistema, por la columna de términos constantes.

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} \boxed{3} & 2 & -1 \\ \boxed{-1} & 3 & 4 \\ \boxed{8} & 4 & 2 \end{vmatrix}$$

iii) $\det(A_2)$, el cual se forma a partir del determinante de A, al sustituir la segunda columna, la cual contiene los coeficientes de x_2 en las distintas ecuaciones del sistema, por la columna de términos constantes.

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix}5 & \boxed{3} & -1\\ 2 & \boxed{-1} & 4\\ 3 & \boxed{8} & 2\end{vmatrix}$$

iv) $\det(A_3)$, el cual se forma a partir del determinante de A, al sustituir la tercera columna, la cual contiene los coeficientes de x_3 en las distintas ecuaciones del sistema, por la columna de términos constantes.

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix}5 & 2 & \boxed{3}\\ 2 & 3 & \boxed{-1}\\ 3 & 4 & \boxed{8}\end{vmatrix}$$

Se evalúa cada uno de estos determinantes.

Evaluando el det(A) por la primera fila, se tiene:

$$\det(A)=(5)\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix}-(2)\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=(5)(-10)-(2)(-8)+(-1)(-1)=-33$$

Evaluando el det(A_1) por la primera fila, se tiene:

$$\det(A_1)=(3)\begin{vmatrix}3 & 4\\ 4 & 2\end{vmatrix}-(2)\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 8 & 2\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 8 & 4\end{vmatrix}=(3)(-10)-(2)(-34)+(-1)(-28)=66$$

Evaluando el det(A_2) por la primera fila, se tiene:

$$\det(A_2)=(5)\begin{vmatrix}-1 & 4\\ 8 & 2\end{vmatrix}-(3)\begin{vmatrix}2 & 4\\ 3 & 2\end{vmatrix}+(-1)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 8\end{vmatrix}=(5)(-34)-(3)(-8)+(-1)(19)=-165$$

Evaluando el det(A_3) por la primera fila, se tiene:

$$\det(A_3)=(5)\begin{vmatrix}3 & -1\\ 4 & 8\end{vmatrix}-(2)\begin{vmatrix}2 & -1\\ 3 & 8\end{vmatrix}+(3)\begin{vmatrix}2 & 3\\ 3 & 4\end{vmatrix}=(5)(28)-(2)(19)+(3)(-1)=99$$

Por lo tanto, la solución del sistema está dada por:

$$x_1=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}=\frac{66}{-33}=-2 \quad ; \quad x_2=\frac{\det(A_2)}{\det(A)}=\frac{-165}{-33}=5 \quad ; \quad x_3=\frac{\det(A_3)}{\det(A)}=\frac{99}{-33}=-3$$

2.- Resolver el sistema (Arce_S., Castillo_E., & González, 2003):

$$\begin{cases} 2x+y+z &= 0 \\ x-y+5z &= 0 \\ y-z &= 4 \end{cases}$$

Solución:

$$D(A)=\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 5 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-6; \quad x=-(\frac{1}{6})\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-4;$$

$$y=-(\frac{1}{6})\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 4 & -1 \end{vmatrix}=6; \quad z=-(\frac{1}{6})\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \end{vmatrix}=2.$$

GLOSARIO DEL MÓDULO

Sistemas de ecuaciones lineales: Se refiere a un grupo de ecuaciones lineales, que se componen de variables, coeficientes y operaciones aritméticas.

Solución: Hace referencia al valor que puede tomar cada variable del sistema de ecuaciones lineales.

Método: Se refiere a la forma o manera de cómo se puede resolver o hacer algo.

BIBLIOGRAFÍA

Anónimo. (s.f.). La Recta. Obtenido de https://www.uv.es/lonjedo/esoProblemas/3eso11recta.pdf

Arce_S., C., Castillo_E., W., & González, J. (2003). Algebra Lineal. San José: Universidad de Costa Rica.

Aufmann, R., & Lockwood, J. (2013). Algebra elemental. Santa Fé: Cengage Learning Editores, S.A. de C.V.

AulaFacil. (2023). AulaFacil. Obtenido de Sistema de tres ecuaciones con tres incógnitas: https://www.aulafacil.com/cursos/matematicas-secundaria-eso/ecuaciones/sistema-de-tres-ecuaciones-con-tres-incognitas-l29564

Becerra_Espinosa, J. (s.f.). 4.1 Determinantes. Obtenido de Matemáticas básicas, determinantes: http://132.248.164.227/publicaciones/docs/apuntes_matematicas/41.%20Determinantes.pdf

Costa, V., Rossignoli, R., Sorichetti, C., & Vampa, V. (2018). Algebra Lineal con Aplicaciones: Parte I. Buenos Aires: Universidad Nacional de La Plata.

Eguia_Ribero, I., Unzueta_Inchaurbe, A., & Alberdi_Celaya, E. (febrero de 2015). Fundamentos del Álgebra Lineal. Ejercicios y Cuestiones. Obtenido de https://kipdf.com/isabel-eguia-ribero-aitziber-unzueta-inchaurbe-elisabete-alberdi-celaya_5ab0b02b1723dd419ce4a827.html

Engler, A., Müller, D., Vrancken, S., & Hecklein, M. (2019). Geometría Analítica. Santa Fé: Ediciones UNL.

Kolman, B., & Hill, D. (2006). Álgebra lineal. México: Pearson Education, Inc.

Lexus_Editores. (2008). Álgebra manual de preparación pre-universitaria. Lima: Lexus Editores.

Muñoz_Chipatecua, E. (2021). Una introducción al álgebra y sus aplicaciones. Bogotá: Universidad Piloto de Colombia.

Rivera, M. (2013). Matemáticas básicas preuniversitarias. Panamá: Universidad Tecnológica de Panamá, Departamento de ciencias exactas.

Sobisch, E. (s.f.). Funciones exponenciales y logarítmicas - FCEN (UNCuyo). Obtenido de UNIDAD N°5 Funciones exponenciales y logarítmicas: https://fcen.uncuyo.edu.ar/upload/unidad-5-actualizada.pdf

UCSC. (03 de 2020). MANUAL DE ÁLGEBRA, Unidad de Acompañamiento y Acceso a la Universidad. Obtenido de https://sitios.ucsc.cl/pace/wp-content/uploads/sites/41/2020/03/ManualAlgebra.pdf

UTN. (s.f.). Ecuaciones e inecuaciones. Obtenido de Manual de Matemática preuniversitaria: file:///C:/Users/Dell/Desktop/TEC%20BIOLOG%C3%8DA%20-%20QU%C3%8DMICA/MATEM%C3%81TICAS%20I/ecuaciones%20e%20inecuaciones/Unidad%202%20-%20Fuente%202+.pdf

Uzuriaga_López, V. L., & Martínez_Acosta, A. (2015). Álgebra Lineal desde un enfoque desarrollador. Pereira: Universidad Tecnológica de Pereira.

Vélez, E. (s.f.). Sistemas de ecuaciones lineales y determinantes. Bayamón: Departamento de Matemáticas, Universidad de Puerto Rico.





Primera Edición

ISBN: 978-9942-692-06-1

